Le calcul intégral

Cours du DEAU principalement, ainsi que quelques extrait de livre, ainsi que mes méthodes de calcul
Quand j'aurais fini, mes propres cours sur le calcul différentiel, je referais moi-même mes cours sur le calcul intégral. Il est évident que je prendrai et m'inspirerai en large partie de ce cours pour construire le miens. Bien que je trouve ce cours insufisant, je le saisi pour 2 raisons :

D'une part, j'aime saisir mon propre historique que j'ai parcouru
D'autre part, cela fait toujours du bien de garder en mémoire ce que l'on a étudié, construit, bref qu'il reste une trace à part entière. J'aurais pu photocopié, mais c'est long.
De plus les nombreux exemples littéral et numérique seront repris dans mon cours à moi.

LE CALCUL INTEGRAL **1**

CALCUL INTEGRALE **3**

I) RAPPEL : CALCUL DIFFERENTIEL **3**

1.1) DEFINITION **3**

A) FONCTION DIFFERENTIELLE 3
B) FONCTION DERIVEE : 3
C) RELATION DERIVEE - DIFFERENTIELLE 3
E) ECRITURE EQUIVALENTE : 4
F) FONCTION COMPOSEES 4

1.2) TABLEAU DES DIFFÉRENTIELLES **5**

1) FONCTION PRIMITIVES : 6
2) DEFINITION 6
b) conséquence *6*
c) théorème : *6*

II) INTEGRALE INDEFINI **8**

ADDITIVITE OU LINEARITE 8
MULTIPLICATION SCALAIRE 8

A1) INTEGRALES INDEFINIES **9**

1) FONCTIONS POLYNOMIALES : 9

II INTEGRALES DEFINIES **10**

LES INTEGRALES QUI SONT DEFINIES ET BORNEES DANS UN INTERVALLE QUE L'ON APPELLE INTEGRALE DEFINIE **11**

LA RELATION DE CHASLE POUR DEUX INTEGRALES **11**

III METHODE D'INTEGRATION **13**

1) INTEGRATION CLASSIQUE 13
2) CHANGEMENT DE VARIABLE 13
3) INTEGRATION PAR PARTIE 15
4) INTEGRATION PAR DECOMPOSITION EN ELEMENTS SIMPLE : 17
Méthode 1 : la division polynomiale *17*
Intégration par décomposition simple *18*
METHODE 2 : INTEGRATION PAR DECOMPOSITION EN POLE DE PREMIERE ESPECE 19

IV) DIFFERENTIELLE PAR FAMILLE DE FONCTIONS **21**

1.1) ADDITION D'INTEGRALES INDEFINIES POLYNOMIALES USUELLES 21
1.2) PROPRIETE OPERATOIRE DES INTEGRALES DE FONCTIONS POLYNOMIALES 24
1.3) FONCTION POLYNOMIALES COMPOSEES 25
SYNTHESE DES INTEGRALES INDEFINIES POLYNOMIALES 26
EXEMPLE NUMERIQUE : 27

2. FONCTION RATIONNELLE **28**

2.1) FONCTION RATIONNELLE MONOMIAMES: 28
2.2) FONCTION RATIONNELLES POLYNOMIALES : 28

3. FONCTION IRRATIONNELLE **30**

4. FONCTIONS LOGARITHMIQUES **31**

5. FONCTION EXPONENTIELLES **32**

6) FONCTION TRIGONOMETRIQUE **35**

FORMULAIRE : **40**

EXERCICES RESOLUES **42**

Calcul Intégrale

I) Rappel : Calcul différentiel

Soit $f(x) = x^3$

Posons $x = x_o + h$

Alors $f(x+h) = (x_0 + h)^3$

Soit $f(x+h) = (x_0)^3 + 3(x_0)^2 h^1 + 3(x_0)^1 h^2 + h^3$

$$\Leftrightarrow f(x+h) = f(x) + 3(x_0)^2 h^1 + 3(x_0)^1 h^2 + h^3$$

$$\Leftrightarrow f(x+h) - f(x) = h[3(x_0)^2 h^1 + h[3(x_0)^1 + h^1]$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = [3(x_0)^2 + h[3(x_0)^1 + h^1]$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}[3(x_0)^2 + h[3(x_0)^1 + h^1]$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x_0)h + \lim_{h\to 0} h[\varepsilon(h)]$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = 3(x_0)^2$$

Remarque : on peut encore noté :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \lim_{h\to 0} h[\varepsilon(h)]$$

On appelle $3(x_0)^2$ h = $f'(x_0)h$ la fonction différentielle première noté $Df = f'(x_0)h$

1.1) Définition

<u>a) Fonction différentielle</u>

La différentielle première, notée df_n, le produit de la fonction dérivée par une constante arbitraire h

<u>b) Fonction dérivée</u> :

La fonction dérivée noté f'(x) est la limite du taux de variation quand $\Delta x \to 0$

c) <u>Relation dérivée - Différentielle</u>

Dire qu'une fonction est dérivable ou différientiable est équivalent et après passage de la limite, ont le même résultat numérique.

e) écriture équivalente :

On note encore :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

En effet f(x) = x et f ' (x) = 1 et df_x = 1 h = h

Ors y' = f ' (x) = dx $\Rightarrow$ dy = 1h = 1 dx

Donc $\frac{dy}{dx} = f'(x) \Leftrightarrow dy = f'(x)\,dx$

Comme $dy = df$ alors $df = f'(x)\,dx$

De plus $dy = y'_x$ alors $y' = f'(x)\,dx$

f) Fonction composées

$$y = f \circ g(x) = f[g(x)]$$
$$\Leftrightarrow y' = f'[g(x)].g'(x)$$
$$\Rightarrow dy = df[g(x)]\ dg$$

Exemple numérique :

Soit $y = x^2 \sin x = u \,.\, v$
il vient que $y' = u'v + uv' = v\,du + u\,dv$
Ors $u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$
Et $v = \sin(x) \Rightarrow dv = \cos(x)\,dx$

D'où $y' = y'_u\,dv + y'_v\,du = x^2 \cos(x)\,dx \sin(x) + 2\,x \cos(x)$
$= 2\,x \cos(x) - x^2 \cos(x) \sin(x)$

1.2) Tableau des différentielles

Fonction initiale	fonction dérivée	fonction différentielle
$f(x)=x^n$	$f'(x)=n\,x^{n-1}$	$dy=n\,x^{n-1}\,dx$
$f(x)=x^{-n}$	$f'(x)=-nx^{-n+1}$	$dy=-n\,x^{-n+1}\,dx$
$f(x)=\sqrt[q]{x^p}=x^{p/q}$	$f'(x)=\frac{p}{q}x^{p/q-1}=$	$dy=\frac{p}{q}x^{p/q-1}dx$
$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$	$f'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)$	$dy=f_1'(x)dx+f_2'(x)dx=[f_1'(x)+f_2'(x)]dx$
$f(x)=\cos(x)$	$f'(x)=-\sin(x)$	$dy=-\sin(x)\,dx$
$f(x)=\sin(x)$	$f'(x)=\cos(x)$	$dy=\cos(x)\,dx$
$f(x)=\tan(x)$	$f'(x)=1+\tan^2(x)$	$dy=dx+\tan^2(x)dx$
$f(x)=\ln(x)$	$f(x)=\frac{1}{x}$	$dy=\frac{dx}{x}$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$	$dy=e^x dx$
$f(x)=uv$	$f'(x)=uv'+u'v$	$dy=u'dx\ v+u\,v'dx \Leftrightarrow dy=v.du+u.dv$
$f(x)=k\ \ f(x)$	$f(x)=k\ \ f'(x)$	$dy=k\ \ f'(x)$
$f(x)=\frac{u}{v}$	$f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$dy=\frac{v\ du-udv}{v^2}$
$f(x)=e^u$	$f'(x)=u'e^u$	$dy=u'e^u$
$f(x)=\ln(u)$		
$f(x)=\cos(U)$	$f'(x)=-U\sin(U)$	$dy=-\sin(U)\,dU$
$f(x)=\sin(U)$	$f'(x)=\cos(U)$	$dy=\cos(U)\,dx$
$f(x)=\tan(U)$	$f'(x)=U'+\tan^2(U)$	$dy=dU+\tan^2(U)dx$

1) Fonction primitives :

F(x) est une fonction primitive de f(x) si et seulement si f(x) est la dérivée de F(x)

Exemple

$$f(x):3x^2 \xrightarrow{Dérivation} f'(x)=6(x)$$
$$F(x)=6(x) \xrightarrow[\text{Primitives}]{\text{Intégration}} f(x)=3x^2$$

En résumé : $f(x):3x^2 \underset{\text{Primitives}}{\overset{Dérivation}{\rightleftarrows}} f'(x)=6(x)=F(x)$

Autre exemple :

$f(x):3x^2+4 \underset{\text{Primitives}}{\overset{Dérivation}{\rightleftarrows}} f'(x)=6(x)+0=F(x)$, Soit littéralement

$f(x):3x^2+c \underset{\text{Primitives}}{\overset{Dérivation}{\rightleftarrows}} f'(x)=6(x)=F(x)$ où c est constante arbitraire non définie

2) définition

Soit f(x) une fonction définie sur l'intervalle [a ; b] et continue sur cet intervalle. On appelle primitive F(x) de cette fonction f(x), une fonction f(x) admettant une infinités de fonction f(x) telles que F(x) est la fonction dérivée de f(x) sur l'intervalle [a ; b]

Notation mathématique : $\forall$ x $\in$ [a ; b] , on a F'(x) = f(x)

b) conséquence

$$Soit\ f(x)=f_1(x)+c_1 \Rightarrow f'(x)=f_1^{'}(x)$$
$$et\quad g(x)=f_1(x)+c_2 \Rightarrow f'(x)=f_1^{'}(x)$$

Il vient que :

$$h(x)=f(x)-g(x)=f_1(x)-f_1(x)+(c_1-c_2)=C$$
$$\Rightarrow h'(x)=f_1'(x)-f_1'(x)=f_1^{'}(x)-f_1^{'}(x)=0$$

- Exemple littérale

$$\begin{cases} f_1(x)=a_1x+b_1 \\ f_2(x)=a_2x+b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1'(x)=a_1 \\ f_2'(x)=a_2 \end{cases} \Leftrightarrow f'_1(x)-f'_2(x)=0$$

Donc la primitive de H(x) d'après les règle de dérivations et H(x) = F(x) – G(x) = Cte (constante)

c) théorème :

si f (x) admet une primitive F(x) alors elle admet par la constante arbitraire une infinité de primitive. En effet, cette constante peut prendre n'importe quelle valeur.

- Exemple

Soit f(x) = $f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a = F(x)$

Ors la constante b disparaît dans le calcul de la dérivation.

Il vient que lorsqu'on cherche sa primitive, on obtient une infinité de primitive

$$f(x) = ax + b \xrightarrow{\text{dérivation}} a = F(x)$$
$$F(x) = a \xrightarrow{\text{primitive}} ax + C$$

ou C est un nombre inconnu ou indéfinie et peut prendre n'importe quel valeur lorqu'on a que sa fontion dérivée. On dit que C est une constante arbitraire

la constante c appelé constante arbitraire signifie que c peut prendre n'importe quel valeur numérique

Exemple numérique

$$f(x) = 4x^2 + 3 \Rightarrow f'(x) = 8x = F(x)$$
$$F(x) = 8x \Rightarrow f(x) = 4x^2 + C$$

Pour déterminer cette constante, il faut et il suffit que f(x) s'annule en un point x_0

Exemple : $f(x) = 3x^2 + 4$ est telle que f(x) s'annule $x_0 = 2$ alors :

F(x) est la dérivabilité de f(x)

Ors si $f(x) = ax^n + bx^m$
On a $f'(x) = anx^{n-1} + mbx^{m-1}$
Et de F(x), on déduit que :

$$\begin{cases} na = 3 \\ n - 1 = 2 \\ mb = 4 \\ m - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 3\ ; \\ a = \dfrac{3}{3} \\ m = 1 \\ b = \dfrac{4}{1} \end{cases} \quad \text{D'où } F(x) \xrightarrow{P} f(x) = x^3 - 4x + c \Rightarrow f(x) = x^3 - 4x + c$$

Comme f(x) s'annule en $x_0 = 2$, on a :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - 4x + c \\ f(2) = 2^3 + 4(2) + c \Leftrightarrow 2^3 - 4(2) + c = 0 \Leftrightarrow 8 - 8 + c = 0 \Leftrightarrow c = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases}$$

Donc la constante arbitraire est $c = 0$, La primitive unique est donc $x^3 - 4x$

Notation des primitives

On note l'ensembles des primitives par le symbole $\int f'(x)\,dx$ qui s'appelle intégrale indéfini puisqu'elle n'est pas borné

II) Intégrale Indéfini

On appelle intégrale indéfini l'ensemble des fonctions primitives F(x)+C non borné sur un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $F(x)+c=\int g(x)\,dx=\int f'(x)dx=\int df$

Propriété élémentaire de l'intégrale indéfini

Additivité ou linéarité

Par la notation des fonctions primitives
De $F(x)+G(x)+H(x)=A(x)$,
On a $A'(x)=F'(x)+G'(x)+H'(x)=f'(x)dx+g'(x)dx+h'(x)dx$
Par la notation des intégrales indéfinis, on a donc

$$\int A'(x)dx=\int f'(x)dx+\int g'(x)dx+\int h'(x)dx$$

$$\Leftrightarrow A'(x)+C=\int f'(x)dx+\int g'(x)dx+\int h'(x)dx$$

Multiplication scalaire

$$De\,F(x)=\lambda G(x), on\,a\,F'(x)=\lambda' G(x)+\lambda G'(x)$$

$Ors\,\lambda=$ constante $\Rightarrow \lambda'=0 \Rightarrow$ F'(x)=λG'(x)

Et donc la constante λ n'intervient pas dans le calcul des fonctions dérivées et par conséquent n'intervient pas dans le calcul intégrale soit :

$$\lambda(G(x)+C)=\int \lambda\ g(x)\ dx\ =\lambda\int\ g(x)\ dx$$

Exemple numérique :

$$f(x)=4x^3 \Rightarrow f'(x)=(4)'(x^3)+(4)(x^3)'$$

$$\Leftrightarrow f(x)=4x^3 \Rightarrow f'(x)=0(x^3)+(4)(3x^2)$$

$$\Leftrightarrow f(x)=4x^3 \Rightarrow f'(x)=(4)(3x^2)$$

Par suite :

$$\int f'(x)\,dx=\int(4)(3x^2)\,dx=(4)\int(3x^2)\,dx=4\left(3\frac{x^3}{3}\right)=4x^3+C$$

A1) Intégrales indéfinies

1) fonctions polynomiales : $f(x)=\int x^n \; dx$

a) Méthode 1 :

On en déduit des fonctions dérivées ses fonctions primitives, soit :

$$f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=n\,x^{n-1}$$

Par suite :

$$f(x)=x^n \xrightarrow{\text{dérivée}} f'(x)=n\,x^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x)=x^n \xleftarrow{\text{Primitive}} f'(x)=n\,x^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x)=x^{n+1} \xleftarrow{\text{Primitive}} f'(x)=n+1\;x^{(n+1)-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1} \xleftarrow{\text{Primitive}} f'(x)=\frac{n+1}{n+1}x^{(n+1)-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1} \xleftarrow{\text{Primitive}} f'(x)=x^n$$

$$\Leftrightarrow \quad F(x)=x^n \xrightarrow{\text{Primitive}} f(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Donc : $\boxed{\int F(x)\,dx=\int x^n \; dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C}$

b) Méthode 2

Par suite, posons un algoritme de cette intégrale
determinons la primitive de l'intégrale $f(x)=x^n$, soit $\int f(x)\,dx=\int x^n \quad dx$:

De $f(x)=x^n \Leftrightarrow f'(x)=n\,x^{n-1}\;dx$

Il vient que : $f(x)=\int f'(x)dx=\int n\,x^{n-1}\;dx=x^n+C$

De la multiplication scalaire, on peut écrire :

$f(x)=\int n\,x^{n-1}\;dx=n\int x^{n-1}\;dx=x^n+C$

Posons m=n-1, il vient que n = m+1

Alors $n\int x^{n-1}\;dx=x^n \Leftrightarrow m+1\int x^{(m+1)-1}\;dx=x^m \Leftrightarrow \frac{m+1}{m+1}\int x^{(m+1)-1}\;dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}+C$

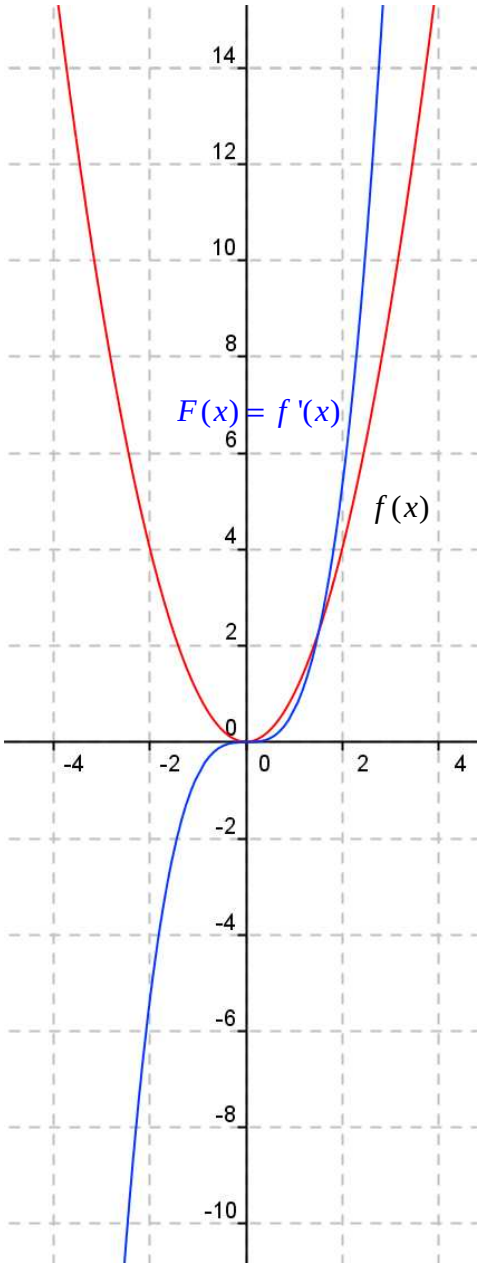
Soit : $\int x^m \; dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}+C$

et donc : $\boxed{\int x^n \; dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C}$

De cette intégrale indéfinie, on peut trouver toutes les intégrales de fonctions monomiales

II Intégrales définies

1) Notions d'intégrale définies



Soit la fonction :

$$f(x) = 2\frac{x^3}{3} \text{ et } g(x) = x^2$$

Tel que $\int x^2 dx = 2\frac{x^3}{3}$

Il vient que

$$\sum_{i=0}^{j=1}(x_j - x_i)^2 + \sum_{i=1}^{j=2}(x_j - x_i)^2 + ... + \sum_{i=n}^{j=n-1}(x_j - x_i)^2$$

$$\sum_{i=0}^{j=1} 2\frac{(x_j - x_i)^2}{3} + \sum_{i=0}^{j=1} 2\frac{(x_j - x_i)^2}{3} + ... + \sum_{i=0}^{j=1} 2\frac{(x_j - x_i)^2}{3}$$

Soit que :

$$\int \sum_{i=0}^{j=1}(x_j - x_i)^2 = \sum_{i=0}^{j=1} 2\frac{(x_j - x_i)^2}{3}$$

$$\int \sum_{i=1}^{j=2}(x_j - x_i)^2 = \sum_{i=0}^{j=1} 2\frac{(x_j - x_i)^2}{3}$$

:

$$\int \sum_{i=n}^{j=n-1}(x_j - x_i)^2 = \sum_{i=0}^{j=1} 2\frac{(x_j - x_i)^2}{3}$$

Et donc :

$$I = \int \sum_{i=0}^{j=1}(x_j - x_i)^2 dx + \int \sum_{i=1}^{j=2}(x_j - x_i)^2 dx + ... + \int \sum_{i=n-1}^{j=n}(x_j - x_i)^2 dx$$

$$= \sum_{i=0}^{j=1} 2\frac{(x_j - x_i)^2}{3} + \sum_{i=1}^{j=2} 2\frac{(x_j - x_i)^2}{3} + ... + \sum_{i=n-1}^{j=n} 2\frac{(x_j - x_i)^2}{3}$$

Dès lors on note une intégrale borné entre 2 point de la manière suivante :

$$I = \int_0^1 x^2 + \int_1^2 x^2 + ... + \int_{n-1}^{n} x^2 = \left[2\frac{x^2}{3}\right]_0^1 + \left[2\frac{x^2}{3}\right]_1^2 + ... + \left[2\frac{x^2}{3}\right]_{n-1}^{n}$$

Ors tant graphiquement que dans les propriétés sommatoires, on a :

$$S=\sum_{i=0}^{j=1}(j-i)^2+\sum_{i=1}^{j=2}(j-i)^2+....+\sum_{i=n}^{j=n-1}(j-i)^2$$

$$\Leftrightarrow S=(2-1)^2+(3-2)^2+....+(n-(n-1))$$

$$\Leftrightarrow S=(1)^2+(1)^2+....+(1)=n(1)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{j=1}(j-i)^2+\sum_{i=1}^{j=2}(j-i)^2+....+\sum_{i=n}^{j=n-1}(j-i)^2=\sum_{i=0}^{j=n}(x_j-x_i)^2$$

Ors :

$$S=\sum_{i=0}^{j=1}\frac{2}{3}(x_j-x_i)^2+\sum_{i=1}^{j=2}\frac{2}{3}(x_j-x_i)^2+...+\sum_{i=n-1}^{j=n}\frac{2}{3}(x_j-x_i)^2$$

$$\Leftrightarrow S=\frac{2}{3}\left(\sum_{i=0}^{j=1}(x_j-x_i)^2+\sum_{i=1}^{j=2}(x_j-x_i)^2+...+\sum_{i=n-1}^{j=n}(x_j-x_i)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow S=\frac{2}{3}\left((1)^2+(1)^2+...+(1)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow S=\frac{2}{3}n(1)=\frac{2}{3}n$$

$$\Leftrightarrow S=\frac{2}{3}\sum_{i=0}^{j=n}(x_j-x_i)^2$$

Et par suite :

$$I=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 x^2dx+...+\int_{n-1}^{n} x^2dx=\int_0^n x^2dx$$

$$I=\left[2\frac{x^2}{3}\right]_0^1+\left[2\frac{x^2}{3}\right]_1^2+...+\left[2\frac{x^2}{3}\right]_{n-1}^{n}=\left[2\frac{x^2}{3}\right]_0^n$$

Soit de ces constations, on peut énumérer les propriétés suivantes

Les intégrales qui sont définies et bornées dans un intervalle que l'on appelle intégrale définie

$$I=\int_0^n x^2dx=\left[\frac{2}{3}x^2\right]_0^n=\frac{2}{3}\left[x^2\right]_0^n=\frac{2}{3}(n^2-0^2)$$

La relation de chasle pour deux intégrales

$$I=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 x^2dx=\int_0^2 x^2dx=\left[\frac{2}{3}x^2\right]_0^2$$

Et par extension la relation de chasles pour n intégrales :

$$I=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 x^2dx+...+\int_{n-1}^{n} x^2dx=\int_0^n x^2dx=\left[\frac{2}{3}x^2\right]_0^n$$

III Méthode d'intégration

Intégrer une fonction f(x) consiste à chercher l'ensemble de ses primitives. Il existe plusieurs méthode pour intégrer :

1) intégration classique

Elle consiste à partir de la dérivée de dériver ses primitives. Elle possède un contenu intuitif certains mais par le tableau des dérivée, on peut déterminer les intégrales simples à l'aide de la formule

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

2) Changement de variable

Le changement de variable facilite les intégrations de fonctions composées et des fonctions rationnelles

De $\int h(x)dx$, Où $h(x) = f \circ g(x) = f\left[g(x)\right]$ on peut poser $u = g(x) \Rightarrow du = g'(x)dx$

On calcule l'intégrale

$$\int h(x)dx = \int f \circ g(x) = f'\left[g(x)\right].g'(x)$$

$$Sin(4x+2)dx \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 4x+2 \\ V = f \circ g(x) = f\left[g(x)\right] = \sin(U) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U' = dU = 4 \\ V' = dV = U'(-\cos(U)) = g'(x).f'(g(x)) \end{cases}$$

Soit par suite

$$\begin{cases} I = \int Sin(4x+2)dx \\ u = 4x+2 \Rightarrow du = u'dx = 4\,dx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{4}du \Leftrightarrow \int Sin(u)dx = \int \frac{1}{4} Sin(u)du \\ v = -\cos(u) \Rightarrow dv = \sin(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\int Sin(u)du = \frac{1}{4}(-\cos(u))$$

$$\Leftrightarrow \int Sin(u)dx = -\frac{\cos(u)}{u'}$$

$$\int Sin(4x+2)dx = -\frac{\cos(4x+2)}{4}$$

En effet :

$$f(x) = -\frac{1}{4}\cos(4x+2) = kv \Rightarrow f'(x) = k'.v + kv' = 0v + kv' = kv' = \frac{1}{4}4\sin(4x+2) = \sin(4x+2)$$

Exemple n° 02 :

Soit la fonction $f(x)=\sqrt{4x+5}$. Puisque la racine est positive ou nulle, alors :

Elle est définie sur l'intervalle I telle $4x+5\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \frac{-5}{4} \Leftrightarrow x\in I / I=\left[\frac{-5}{4};\infty\right]$

Soit cette fonction est dérivable sur $I=\left[\frac{-5}{4};\infty\right]$ telle que :

$$f(x)=\sqrt{4x+5} \Leftrightarrow f(u)=\sqrt{u}=u^{1/2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(u)=1/2(u)^{1/2-1}.u' \\ u=4x+5 \underset{\text{Primitive}}{\overset{\text{dérivée}}{\rightleftarrows}} 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f'(u)=\frac{1}{2}(4x+5)^{-1/2}.4=\frac{1}{2}\frac{4}{\sqrt{4x+5}}=\frac{2}{\sqrt{4x+5}}$$

Puisque la fonction dérivée $\frac{2}{\sqrt{4x+5}}$ est définie et continue sur l'intervalle $I=\left[\frac{-5}{4};\infty\right]$ Par conséquent elle intégrable sur cette intervalle

$$\begin{cases} \int \frac{2}{(\sqrt{4x+5})}dx \\ u=4x+5 \Rightarrow u'=4 \Leftrightarrow u'dx=4dx \Leftrightarrow du=4dx \Leftrightarrow dx=\frac{1}{4}du \end{cases}$$

$$Soit \int \frac{2}{(\sqrt{4x+5})}dx=2\int \frac{1}{4}\sqrt{u}\ du=2.\frac{1}{4}\int u^{-1/2}\ du=2.\frac{1}{4}\frac{u^{(-\frac{1}{2}+1)}}{-\frac{1}{2}+1}=2.\frac{1}{4}\frac{u^{(\frac{1}{2})}}{\frac{1}{2}}=2.\frac{1}{4}.2u^{(\frac{1}{2})}=\sqrt{u}=\sqrt{4x+5}$$

3) Intégration par partie

a) Démonstration de la dérivation ou différentielle d'un produit

Des différentielles d'un produit

$$y = u.v \Rightarrow dy = d(uv)$$
$$y' = u'v + uv'$$
$$dy = u'vdx + uv'dx$$
$$dy = udx.v + uv'dx$$
$$dy = vdu + u.dv$$
$$d(uv) = vdu + udv$$

Démonstration de l'intégration par partie

Soit f(x) et g(x), deux fonction dérivables sur l'intervalle I = $[a;b]$, on sait que

$$d(uv) = vdu + udv \Leftrightarrow [f(x).g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x).g'(x)$$

Les fonctions f(x) et g(x) étant définie et continue sur l'intervalle I, les fonctions f'g et fg' et (f ; g)' sont définie et continue sur cette intervalle I, et donc dérivable sur cette intervalle I
Par conséquent, $f'(x)g(x) + f(x).g'(x)$ est intégrable sur cette intervalle.
De $d(uv) = vdu + udv$ en posant $u = f(x)$; $v = g(x)$
Nous avons les primitives suivante :

$$[f(x).g(x)]' = udv + vdu$$
$$\Leftrightarrow d(uv) = udv + vdu$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int d(uv) = \int udv + \int vdu \\ \int d(uv) = uv \end{cases}$$

Ors si une des deux integrales du membre de gauche ne peut pas être détérminé (n'est pas calculable), alors il est possible de contourné la difficulté tel que :

$$\begin{cases} \int d(uv) = \int udv + \int vdu \\ \int d(uv) = uv \\ \int vdu \neq h'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \int d(uv) - \int udv = \int vdu$$

Cette méthode s'appèlle intégration par partie

Théorème

Si f(x) et G(x) admettent des fonctions dérivées définie et continue sur $[a;b]$, alors

$$\int vdu = \int d(uv) - \int udv = [uv] - \int udv$$

Exemple numérique

$$\int f(x).g(x)dx = \int x\sin(2x)dx =$$

Posons u = x et dv = sin(2x) dx

D'où du = 1 dx et $v = \int \sin(2x)dx = -\frac{1}{2}\cos(2x)$

Il inutile d'ajouter la constante additive puisque $-\frac{1}{2}\cos(2x)$ va être intégrer

Soit d'après la définition

$$\int u\ dv = u\ v - \int v\ du$$

Nous avons :

$$(u;dv) = \left(x;\int \sin 2x\right) \Leftrightarrow (u';\int dv = v) = \left(1;-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)$$

$$\Leftrightarrow \int udv = (x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \int -\frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\Leftrightarrow \int udv = (x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + c$$

4) Intégration par décomposition en éléments simple :

Méthode 1 : la division polynomiale

Soit f(x) = $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

Effectuons la division Euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} ax + b & cx+d \\ \cline{2-2} - \quad ax+\dfrac{ad}{c} & \dfrac{a}{c} \\ \cline{1-1} 0 + b - \dfrac{ad}{c} & \end{array}$$

Soit :

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{a}{c}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{cx+d}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c}}{cx+d}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cx+d)}$$

$$\Leftrightarrow \int f(x)dx=\int\frac{a}{c}dx+\int\frac{bc-ad}{c(cx+d)}dx$$

$$\Leftrightarrow \int f(x)dx=\int\frac{a}{c}dx+\frac{bc-ad}{c}\int\frac{1}{(cx+d)}dx \ Ors \left\{u=cx+d \ \ du=cdx \Leftrightarrow dx=\frac{du}{c}\right.$$

$$\Leftrightarrow \int f(x)dx=\int\frac{a}{c}dx+\frac{bc-ad}{c}\int\frac{du}{cu}dx$$

$$\Leftrightarrow \int f(x)dx=\int\frac{a}{c}dx+\frac{bc-ad}{c^2}\int\frac{du}{u}dx$$

$$\Leftrightarrow \int f(x)dx=\frac{a}{c}x+\frac{bc-ad}{c^2}\ln(u)+C$$

Intégration par décomposition simple

ax^2	bx	c	cx	d
$\frac{a\cancel{c}}{\cancel{c}}x^2$	$\frac{ad}{c}x$		$\frac{a}{c}x$	$\frac{(bc-ad)}{c^2}$
0	$\frac{bc-ad}{c}x$	c		
	$+\frac{bc.\cancel{c}-ad\cancel{c}}{c.\cancel{c}}x$	$\frac{bcd-ad^2}{c^2}$		
		$c-\frac{bcd-ad^2}{c^2}$		

$$\frac{ax^2+bx+c}{cx+d}=\frac{a}{c}x+\frac{(bc-ad)}{c^2}+\frac{c-\frac{bcd-ad^2}{c^2}}{cx+d}\Leftrightarrow\frac{ax^2+bx+c}{cx+d}=\frac{a}{c}x+\frac{(bc-ad)}{c^2}+\frac{\frac{c^3-bcd-ad^2}{c^2}}{cx+d}$$

$$\frac{ax^2+bx+c}{cx+d}=\frac{a}{c}x+\frac{(bc-ad)}{c^2}+\frac{1}{(cx+d)}+\frac{bd}{c(cx+d)}+\frac{ad^2}{c^2(cx+d)}$$

$$\frac{ax^2+bx+c}{cx+d}=\frac{a}{c}x+\frac{(bc-ad)}{c^2}+\frac{c^3}{c^3(cx+d)}+\frac{bc^2d}{c^3(cx+d)}+\frac{acd^2}{c^3(cx+d)}$$

$$\frac{ax^2+bx+c}{cx+d}=\frac{a}{c}x+\frac{(bc-ad)}{c^2}+\frac{c(c^2+bcd+acd^2)}{c^3(cx+d)}$$

$$\int\frac{ax^2+bx+c}{cx+d}=\int\left(\frac{a}{c}x+\frac{(bc-ad)}{c^2}+\frac{(c^2+bcd+acd^2)c}{c^3(cx+d)}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow\int\frac{ax^2+bx+c}{cx+d}=\int\frac{a}{c}xdx+\int\frac{(bc-ad)}{c^2}+\int\frac{(c^2+bcd+acd^2)c}{c^3(cx+d)}dx$$

$$\Leftrightarrow\int\frac{ax^2+bx+c}{cx+d}=\frac{a}{c}\int xdx+\int\frac{(bc-ad)}{c^2}+\left(\frac{(c^2+bcd+acd^2)}{c^3}\int\frac{c}{(cx+d)}dx\right)$$

$$\Leftrightarrow\int\frac{ax^2+bx+c}{cx+d}=\frac{a}{c}\int xdx+\int\frac{(bc-ad)}{c^2}+\frac{(c^2+bcd+acd^2)}{c^3}\int\frac{c}{(cx+d)}dx$$

$$\Leftrightarrow\int\frac{ax^2+bx+c}{cx+d}=\frac{a}{c}\int xdx+\int\frac{(bc-ad)}{c^2}+\frac{(c^2+bcd+acd^2)}{c^3}\int\frac{du}{u}$$

$$\Leftrightarrow\int\frac{ax^2+bx+c}{cx+d}=\frac{a}{c}x^2+(bc-ad)x+\frac{(c^2+bcd+acd^2)}{c^3}\ln(u)$$

$$\Leftrightarrow\int\frac{ax^2+bx+c}{cx+d}=\frac{a}{c}x^2+(bc-ad)x+\frac{(c^2+bcd+acd^2)}{c^3}\ln(cx+d)$$

$$\Leftrightarrow\int\frac{ax^2+bx+c}{cx+d}=Ax^2+Bx+C\ \ln(cx+d)$$

http://www.youtube.com/watch?v=PHdsmrvL6-g

Méthode 2 : Intégration par décomposition en pôle de première espèce

Soit $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{ex^2+fx+g}$, $h(x)\exists \Leftrightarrow ex^2+fx+g\neq 0 \Leftrightarrow h(x)\in[-r_1;r_2]$

Effectuons la division euclidienne :

$$\begin{array}{lllllll|l}
ax^3 & + & bx^2 & + & cx & + & d & ex^2+fx+g \\
\cline{8-8}
 & & \dfrac{be-af}{e}x^2 & + & \dfrac{ce-ag}{e}x & + & d & \dfrac{a}{e}x+\dfrac{be-af}{e^2} \\
 & & 0 & + & \left(\dfrac{ce-ag}{e}-\dfrac{bef-af^2}{e^2}\right)x & + & \dfrac{beg-afg}{e^2}-d &
\end{array}$$

$$\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{ex^2+fx+g}=\frac{a}{e}x+\frac{be-af}{e^2}+\frac{\left(\dfrac{ce-ag}{e}-\dfrac{bef-af^2}{e^2}x\right)+\left(\dfrac{beg-afg}{e^2}-d\right)}{ex^2+fx+g}$$

$$\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{ex^2+fx+g}=Ax+B+\frac{Cx+D}{ex^2+fx+g}$$

Détermination des racines du dénominateur :

$$\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{ex^2+fx+g}=Ax+B+\frac{Cx+D}{\left(x-\dfrac{-f+\sqrt{f^2-4eg}}{2e}\right)\left(x-\dfrac{-f-\sqrt{f^2-4eg}}{2e}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{ex^2+fx+g}=Ax+B+\frac{Cx+D}{(x-r_1)(x-r_2)}$$

Détermination des pôles de la fonction

Posons $\alpha;\beta$ tel que $\dfrac{\alpha}{x-r_1}+\dfrac{\beta}{x-r_2}\Leftrightarrow\dfrac{\alpha(x-r_2)+\beta(x-r_1)}{(x-r_1)(x-r_2)}\Leftrightarrow\dfrac{(\alpha+\beta)x}{(x-r_1)(x-r_2)}-\dfrac{(\alpha r_2+\beta r_1)}{(x-r_1)(x-r_2)}$

Ce qui implique que :

$$\begin{cases}\dfrac{(\alpha x+\beta x)}{(x-r_1)(x-r_2)}=\dfrac{Cx}{(x-r_1)(x-r_2)}\\ -\dfrac{(\alpha r_2+\beta r_1)}{(x-r_1)(x-r_2)}=\dfrac{D}{(x-r_1)(x-r_2)}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\alpha+x\beta=C\\ r_2\alpha+r_1\beta=D\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{cases}r_1x\alpha+r_1x\beta=Cr_1\\ r_2x\alpha+r_1x\beta=D\end{cases}\\ \begin{cases}r_2x\alpha+r_2x\beta=Cr_2\\ r_2\alpha+r_1\beta=D\end{cases}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&1\\ r_2&r_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C\\ D\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}r_1-r_2&0\\ 0&r_2-r_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Cr_1-D\\ Cr_2-D\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0\\ 0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{Cr_1-D}{r_1-r_2}\\ \dfrac{Cr_2-D}{r_2-r_1}\end{pmatrix}$$

Réaffectation des solution du système dans les pôles de première espèces

$$\frac{\alpha}{x-r_1}+\frac{\beta}{x-r_2}=\frac{Cr_1-D}{r_1-r_2}x+\frac{Cr_2-D}{r_2-r_1}$$

$$\Rightarrow \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{ex^2+fx+g}=Ax+B+\frac{Cx+D}{ex^2+fx+g}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{ex^2+fx+g}=Ax+B+\frac{Cr_1-D}{r_1-r_2}x+\frac{Cr_2-D}{r_2-r_1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{ex^2+fx+g}=\left(\begin{array}{l} Ax \\ B \\ \dfrac{\left(\dfrac{ce-a\ g}{e}-\dfrac{be\ f-a\ f^2}{e^2}x\right)\left(\dfrac{-f+\sqrt{f^2-4eg}}{2e}\right)x-\left(\dfrac{beg-a\ f\ g}{e^2}-d\right)}{\left(\dfrac{-f+\sqrt{f^2-4eg}}{2e}\right)-\left(\dfrac{-f-\sqrt{f^2-4eg}}{2e}\right)} \\ \dfrac{\left(\dfrac{ce-a\ g}{e}-\dfrac{be\ f-a\ f^2}{e^2}x\right)\left(\dfrac{-f-\sqrt{f^2-4eg}}{2e}\right)x-\left(\dfrac{beg-a\ f\ g}{e^2}-d\right)}{\left(\dfrac{-f-\sqrt{f^2-4eg}}{2e}\right)-\left(\dfrac{-f+\sqrt{f^2-4eg}}{2e}\right)} \end{array}\right)$$

Par suite si $\sqrt{f^2-4eg}=\Delta\, tel\ que\ \Delta\in\mathbb{N}, alors:$

$$\int\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{ex^2+fx+g}=\int Ax+\int B+\int\frac{Cr_1-D}{r_1-r_2}x+\int\frac{Cr_2-D}{r_2-r_1}$$

$$\Leftrightarrow \int\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{ex^2+fx+g}=Ax^2+Bx+\frac{Cr_1-D}{r_1-r_2}x^2+\frac{Cr_2-D}{r_2-r_1}x+C$$

$$\Leftrightarrow \int\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{ex^2+fx+g}=\left(A+\frac{Cr_1-D}{r_1-r_2}\right)x^2+\left(B+\frac{Cr_2-D}{r_2-r_1}\right)x+C$$

IV) Différentielle par famille de fonctions

1.1) Addition d'intégrales indéfinies polynomiales usuelles

Primitive de fonctions primitive constante

$$f(x) = a = ax^0$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x+\Delta x)^0 - a(x^0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(1) - a(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

Soit : $f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0 = \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow dy = 0dx \Leftrightarrow \int dy = \int 0dx = a$

Primitives des fonctions du premier degré

Primitives des Fonction linéaire identique :

$$f(x) = x$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - (x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x - a + \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

Soit : $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1 = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = 1dx \Leftrightarrow \int dy = \int 1dx = x + c$

Primitive des Fonction linéaire scalaire

$$f(x) = a = ax$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x+\Delta x) - a(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ax - ax + a\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a = a$$

Soit : $f(x) = ax \Rightarrow f'(x) = a = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = adx \Leftrightarrow \int dy = \int a\,dx = ax + c$

Propriété de l'intégrale scalaire des fonctions du premier degré :

Alors $\begin{cases} a\int dy = a\int 1dx = x + c \Rightarrow a\int dy = a\int 1dx = a(x) + ac = ax + k \\ \int dy = \int a\,dx = ax + k \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{a\int f'(x)dx = \int a\,f'(x)dx}$

Primitives des fonction affines :

$$f(x) = ax + b$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x+\Delta x) + b - a(x) + b}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(ax+b) - (ax+b) + a\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a = a$$

Soit : $f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = ax = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = adx \Leftrightarrow \int dy = \int a\,dx = ax + c$

Primitive de fonctions du second degré

Primitive de la fonction du second degré identique

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - a(x)^2}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{x^2 - x^2}{\Delta x} + \frac{2x\Delta x}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = 2xdx \Leftrightarrow \int dy = \int 2x\,dx = x^2 + c$$

Primitives scalaire du second degré

$$f(x) = ax^2$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x+\Delta x)^2 - a(x)^2}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{ax^2 - ax^2}{\Delta x} + \frac{2ax\Delta x}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} 2ax + \Delta x = 2ax$$

Soit : $f(x) = ax^2 \Rightarrow f'(x) = 2ax = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = 2axdx \Leftrightarrow \int dy = \int 2ax\,dx = ax^2 + c$

Propriété de l'intégrale scalaire des primitives du second degré

Alors $\begin{cases} a\int dy = a\int x\,dx = ax^2 + c \\ \int dy = \int a\,x\,dx = ax^2 + c \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{a\int f'(x)dx = \int a\,f'(x)\,dx}$

Primitives de fonction du n^ième^ degré :

Primitive de la fonction du n^ième^ degré identique

$$f(x) = x^n$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - ax^n}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}.(\Delta x)^1 + \left(\sum_{i=2}^{i=n} C_n^k x^{n-k}.(\Delta x)^k\right) - x^n}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}.\Delta x^1}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sum_{i=2}^{i=n} C_n^k x^{n-k}.(\Delta x)^k\right) + (x^n - x^n)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}.\Delta x}{\Delta x} = nx^{n-1}$$

Soit : $f(x) = x^n \Leftrightarrow f'(x) = nx^{n-1} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \int dy = \int nx^{n-1} dx = x^n$

$$f(x) = ax^n$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x+\Delta x)^n - ax^n}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ax^n + nax^{n-1}.\Delta x)^1 + \left(\sum_{i=2}^{i=n} C_n^k ax^{n-k}.(\Delta x)^k\right) - ax}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nax^{n-1}.\Delta x^1}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sum_{i=2}^{i=n} C_n^k ax^{n-k}.(\Delta x)^k\right) + (ax - ax)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nax^{n-1}.\Delta x}{\Delta x} = nax^{n-1}$$

Soit : $f(x) = ax^n \Leftrightarrow f'(x) = nax^{n-1} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \int dy = \int nax^{n-1} dx = ax^n$

Propriété des primitives scalaire du n^ième^ degré

Alors $\begin{cases} a\int dy = a\int (n-1)x^{n-1}\, dx = ax^n + c \\ \int dy = \int a(n-1)x^{n-1}\, dx = ax^n + c \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{a\int f'(x)dx = \int a\ f'(x)dx}$

Intégrale n^ième^

Par suite en posant n = m+1, on a :

$$\int dy = \int nax^{n-1} dx = ax^n \Leftrightarrow \int dy = \int m+1ax^{(m+1)-1} dx = ax^{m+1}$$

Soit encore de la propriété des intégrales scalaire :

$$m+1\int ax^{(m+1)-1} dx = ax^{m+1} \Leftrightarrow \frac{m+1}{m+1}\int ax^{(m+1)-1} dx = \frac{ax^{m+1}}{m+1} \Leftrightarrow \int ax^m dx = \frac{a}{m+1} x^{m+1}$$

Par suite, on pourra écrire les intégrales par famille de fonction

1.2) Propriété opératoire des intégrales de fonctions polynômiales

a) Propriété 1 : Multiplication scalaire d'intégrale indéfini

Des déterminations des primitives, on a constaté à chaque fois que :

$$\begin{cases} a\int dy = a\int 1dx = x+c \Rightarrow a\int dy = a\int 1dx = a(x)+ac = ax+k \\ \int dy = \int a\,dx = ax+k \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{a\int f'(x)dx = \int a\,f'(x)\,dx}$$

$$\begin{cases} a\int dy = a\int x\,dx = a\dfrac{x^2}{2}+c \\ \int dy = \int a\,x\,dx = a\dfrac{x^2}{2}+c \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{a\int f'(x)dx = \int a\,f'(x)\,dx}$$

$$\begin{cases} a\int dy = a\int (n-1)x^{n-1}\,dx = ax^n+c \\ \int dy = \int a(n-1)x^{n-1}\,dx = ax^n+c \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{a\int f'(x)dx = \int a\;f'(x)\,dx}$$

Soit de manière plus générale, on peut écrire que

$$(af(x))' = af'(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \int a.f'(x)dx = a.f(x)+k \\ a\int f'(x)dx = a.f(x)+k \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\int a.f'(x)dx = a\int f'(x)dx}$$

b) Addition d'intégrales indéfini de fonctions polynomiales : la linéarité d'intégrale

De :

$$\left(f_0(x);\, f_1(x);\, f_2(x);\, f_3(x);\ldots;\, f_{n-1}(x);\, f_n(x);\, f_{n+1}(x)\right) = (a_0; a_1x; a_2x^2; a_3x^3;\ldots; a_{n-1}x^{n-1}; a_nx^n; a_{n+1}x^{n+1})$$

Il vient que :

$$\left(f'_0(x);\, f'_1(x);\, f'_2(x);\, f'_3(x);\ldots;\, f'_{n-1}(x);\, f'_n(x);\, f'_{n+1}(x)\right) = (0; a_1; a_2x^1; a_3x^2;\ldots; a_{n-1}x^{n-2}; a_nx^{n-1}; a_{n+1}x^n)$$

Et par suite :

$$\int\sum_{i=0}^{i=n} f'_i(x)dx = \int\left(f'_0(x)+f'_1(x)+f'_2(x)+f'_3(x)+\ldots+f'_{n-1}(x)+f'_n(x)+f'_{n+1}(x)\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \int\sum_{i=0}^{i=n} f'_i(x)\,dx = a_1+a_2x^1+a_3x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-2}+a_nx^{n-1}+a_{n+1}x^n$$

$$\Leftrightarrow \int\sum_{i=0}^{i=n} a_ix^i = a_{i-1}x^{i+1} \Leftrightarrow \int\sum_{i=0}^{i=n} a_ix^i = \frac{a_i}{i+1}x^{i+1}$$

Et comme :

$$\bigcup_{i=0}^{i=n}\int f_i(x)dx = \left(\int f'_0(x)dx; \int f'_1(x)dx; \int f'_2(x)dx; \int f'_3(x)dx;\ldots; \int f'_n(x)dx; \int f'_{n+1}(x)dx\right)$$

$$\Leftrightarrow \bigcup_{i=0}^{i=n} f_i(x)dx = \left(\int a_0dx; \int a_1xdx; \int a_2x^2dx; \int a_3x^3dx;\ldots; \int a_{n-1}x^ndx; \int a_nx^ndx; \int a_{n+1}x^{n+1}dx\right)$$

$$\Leftrightarrow \bigcup_{i=0}^{i=n} f'_i(x)dx = \left((0; a_1; a_2x^1; a_3x^2;\ldots; a_{n-1}x^{n-2}; a_nx^{n-1}; a_{n+1}x^n)\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=0}^{i=n}\left(\int a_ix^idx\right) = 0+a_1+a_2x^1+a_3x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-2}+a_nx^{n-1}+a_{n+1}x^n \\ \int\left(\sum_{i=0}^{i=n} a_ix^i\right)dx = a_1+a_2x^1+a_3x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-2}+a_nx^{n-1}+a_{n+1}x^n \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \sum_{i=0}^{i=n}\left(\int a_ix^idx\right) = \int\left(\sum_{i=0}^{i=n} a_ix^i\right)dx \\ ou \\ \sum_{i=0}^{i=n}\left(\int f'_i(x)dx\right) = \int\left(\sum_{i=0}^{i=n} f'_i(x)\right)dx \end{array}}$$

1.3) Fonction polynomiales composées

$$\begin{cases} I = \int (3x^2+4)^3\,dx = \\ u = 3x^2+4 \Leftrightarrow du = 6xdx \Leftrightarrow \dfrac{du}{6} = x\,dx \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow I = \int u^3 \frac{du}{6} = \frac{1}{6}\int u^3 du = \frac{1}{6}\frac{u^{3+1}}{3+1} = \frac{1}{6}\frac{u^4}{4} = \frac{1}{24}(3x^2+4)^4$$

SYNTHESE DES INTEGRALES INDEFINIES POLYNOMIALES

2.1) Intégrale indéfini de fonctions constantes

$$\int dy = \int dx = 1$$
$$\int dy = \int 2a = 2ax + k$$

2.2) Intégrale indéfini de Fonctions du premier degré

$$\int dy = \int ax\ dx = \frac{a}{2}x^2 + k$$
$$\int dy = \int 2ax\ dx = \frac{2}{2}ax^2 + c = ax^2 + k$$
$$\int dy = \int (ax+b)dx = \frac{a}{2}x^2 + bx + k = a\int (x)dx + b\int dx$$

2.3) Intégrale indéfini de fonctions du second degré

$$\int dy = \int x^2\ dx = \frac{1}{3}x^3 + k$$
$$\int dy = \int ax^2\ dx = \frac{a}{3}x^3 + k$$
$$\int dy = \int 3x^2\ dx = \frac{3}{3}x^3 + k = x^3 + k$$
$$\int dy = \int (ax^2 + bx)\,dx = a\int (x^2)\,dx + b\int (x)\,dx = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + k$$
$$\int dy = \int (ax^2 + bx + c)\,dx = a\int (x^2)\,dx + b\int (x)\,dx + c\int dx = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx + k$$

2.4) Intégrale indéfini de fonction du troisième degré :

$$\int dy = \int ax^3 = \frac{a}{4}x^4 + c$$
$$\int dy = \int (ax^3 + bx^2)dx = a\int (x^3)dx + b\int (x^2)dx = \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + k$$
$$\int dy = \int (ax^3 + bx^2 + cx)dx = a\int (x^3)dx + b\int (x^2)dx + c\int dx = \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{c}{2}x^2 + k$$

2.5) Intégrale de fonctions du nième degré

$$\int dy = \int \left[n\,x^{n-1} \right] dx = \frac{n}{(n-1)+1}x^{n-1+1} + k = \frac{n}{n}x^n + k = x^n$$

$$\boxed{\int dy = \int ax^n = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + k}$$

$$\int dy = \int \sum_{i=n}^{i=0} a_i x^i = \sum_{i=n}^{i=0} \frac{a_i}{i+1}x^{i+1} + \sum_{i=n}^{i=0} k_i$$

Exemple numérique : $\forall (x;c_i)\in\mathbb{R}^2 \; et \; f(x)=2x^5+3x^4+4x^3+5x^2+6x+7$

$$\int f(x)\,dx=\int(2x^5+3x^4+4x^3+5x^2+6x+7)dx$$
$$\Leftrightarrow \int f(x)\,dx=\int 2x^5dx+\int 3x^4dx+\int 4x^3dx+\int 5x^2dx+\int 6x\,dx+\int 7\,dx$$
$$\Leftrightarrow \int f(x)\,dx=2\int x^5dx+3\int x^4dx+4\int x^3dx+5\int x^2dx+6\int x\,dx+7\int dx$$
$$\Leftrightarrow \int f(x)\,dx=\left(2\frac{x^6}{6}+c_1\right)+\left(3\frac{x^5}{5}+c_2\right)+\left(4\frac{x^4}{4}+c_3\right)+\left(5\frac{x^3}{3}+c_4\right)+\left(3x^2+c_5\right)+\left(7x+c_6\right)$$
$$\Leftrightarrow \int f(x)\,dx=\frac{1}{3}x^6+\frac{3}{5}x^5+x^4+\frac{5}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+7x+\sum_{i=1}^{i=5}c_i$$

Soit matriciellement (Ecriture d'enseignement supérieur ; Algèbre linéaire) :

$$\int(2x^5+3x^4+4x^3+5x^2+6x+7)dx=\int\left(\sum_{i=5}^{i=0}(2;3;4;5;6;7)x^i\right)dx$$
$$\Leftrightarrow \int\left(\sum_{i=5}^{i=0}(2;3;4;5;6;7)x^i\right)dx=\left(\sum_{i=5}^{i=0}(2;3;4;5;6;7)\right)\left(\int x^i\;dx\right)$$
$$\Leftrightarrow \int\left(\sum_{i=5}^{i=0}(2;3;4;5;6;7)x^i\right)dx=\sum_{i=5}^{i=0}(2;3;4;5;6;7)\frac{x^{i+1}}{i+1}+\sum_{i=1}^{i=5}c_i$$
$$\Leftrightarrow \int\left(\sum_{i=5}^{i=0}(2;3;4;5;6;7)x^i\right)dx=\sum_{i=6}^{i=1}\left(\frac{2}{6};\frac{3}{5};\frac{4}{4};\frac{5}{3};\frac{6}{2};\frac{7}{1}\right)x^i+C$$
$$\Leftrightarrow \int\left(\sum_{i=5}^{i=0}(2;3;4;5;6;7)x^i\right)dx=\frac{1}{3}x^6+\frac{3}{5}x^5+x^4+\frac{5}{3}x^3+2x^2+7x+C$$

Autre notation (niveau terminale)

$$f(x)=u+v+w+...+z\Rightarrow f'(x)=u'+v'+w'+...+z'=U+V+W+...+Z$$
$$\Leftrightarrow \int(U+V+W+...+Z)dx=\int Udx+Vdx+Wdx+...+Zdx$$
$$\Leftrightarrow \int(U+V+W+...+Z)dx=\int dU+dV+dW+...+dZ$$
$$\Leftrightarrow \int dU+dV+dW+...+dZ=u+v+w+...+z+C$$

2. Fonction rationnelle

2.1) fonction rationnelle monomiames: $f(x)=\frac{1}{x^n}$

Niveau Terminale

Des fonctions monominales ou moniales $\begin{cases} \int x^n\ dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \\ \frac{1}{x^n}=x^{-n} \end{cases}$

Il vient que :

$$\int \frac{1}{x^n}dx=\int \frac{dx}{x^n}=\int x^{-n}dx=\int x^m\ dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}$$

$Comme\, n>1,\ alors$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dx}{x^n}=\frac{x^{m+1}}{m+1}=\frac{x^{-n+1}}{-n+1}=-\frac{x^{-(n-1)}}{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dx}{x^n}=\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$$

2.2) Fonction rationnelles polynomiales : $f(x)=\frac{U}{V}$

Des fonctions dérivées et différentielles :

$$f(x)=\frac{u}{v}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

Des fonctions dérivée :

$$f(x)=\frac{(2x+5)}{(3x+2)}\Leftrightarrow f(x)=\frac{2(3x+2)+3(2x+5)}{(3x+2)}=\frac{12x+19}{(3x+2)^2}$$

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{a(cx+d)+c(ax+b)}{cx+d}=\frac{2ac\,x+ad+bc}{(cx+d)^2}$$

On peut obtenir les coefficient du numérateur par identification des coefficient :

$$\begin{cases} \frac{12x+19}{(3x+2)^2}=\frac{2.3a\,x+(2a+3b)}{(cx+d)^2} \\ c=3 \\ d=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ac=12 \\ 2a+3b=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2.3a=12\Leftrightarrow a=\frac{12}{6}=2 \\ 2a+3b=19\Leftrightarrow b=\frac{19-2(2)}{3}=\frac{15}{3}=5 \end{cases}$$

Et donc $\int \frac{12x+19}{(3x+2)^2}\ dx=\frac{2x+5}{3x+2}$

Ors

$$\begin{array}{l|l} 12x+19 & 3x+2 \\ \cline{2-2} 0-8x+19 & 4x-2 \\ \quad 2x-15 & \end{array}$$

$$\frac{12x+19}{3x+2}=2(x-1)+\frac{2x-15}{3x+2}$$

3. Fonction irrationnelle

$$\text{De } \int f(x)\,dx = \int g^{i}(x)\,dx = \frac{g^{i+1}(x)}{i+1} + C$$

Il vient que :

$$F(x)+C = \int x^{m}\,dx = \int x^{\frac{p}{q}}\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C = \frac{x^{\frac{p}{q}+\frac{1}{q}}}{\frac{p}{q}+\frac{1}{q}} + C = \frac{x^{\frac{p+1}{q}}}{\frac{p+1}{q}} + C = x^{\frac{p+1}{q}} \times \frac{q}{p+1} = q\frac{x^{\frac{p+1}{q}}}{p+1}$$

$$\text{Si } \frac{p+1}{q} > 0\text{, alors } \int x^{\frac{p}{q}}\,dx = \frac{q\sqrt[q]{x^{p+1}}}{p+1} + C$$

$$\text{Si } \frac{p+1}{q} < 0\text{, alors } \int x^{\frac{p}{q}}\,dx = \frac{q}{(p+1)\sqrt[q]{x^{p+1}}} + C$$

Exemple numérique :

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \int f(x)\,dx = \int \sqrt{x}\;dx = \int x^{\frac{1}{2}}\;dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}} + c = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = 2\frac{\sqrt{x^{3}}}{3}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \int f(x)\;dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\;dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{-\frac{1}{2}+\frac{2}{2}}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}} + c = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = -2\sqrt{x}$$

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \int f(x)\;dx = \int 2x^{-\frac{1}{2}}\;dx = 2\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = 2\frac{x^{-\frac{1}{2}+\frac{2}{2}}}{-\frac{1}{2}+\frac{2}{2}} + c = 2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{x}$$

4. Fonctions logarithmiques

En terminale, cette fonction est à apprendre par cœur

$$f(x)=\frac{1}{x}\Leftrightarrow\int\frac{1}{x}dx=\log(x)+\mathrm{C}$$

$$f(x)=\frac{1}{U}\Leftrightarrow\int\frac{1}{U}dx=U\log(U)\ +\mathrm{C}\ \text{ ou }\ f(x)=\frac{1}{U}\Leftrightarrow\int\frac{1}{U}dx=\ln(U)\ \ ?$$

5. Fonction exponentielles

Rappel des règles de calcul :

De la formule de taylor young : $\mathrm{dl}_n f(x) \overset{0}{\sim} \sum_{k=0}^{k=n} f^k(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!}$, on obtient la série de l'exponentielle donnant la valeur numérique de e où $\lim_{x\to 0} f^k(x_0)=1$; $x_0 \overset{0}{\sim} 0$ tel que :

$$\begin{cases} e^1 = 1+\frac{1^1}{1!}.1+\frac{1^2}{2!}.1+\frac{1^3}{3!}.1+\frac{1^4}{4!}.1+\frac{1^5}{5!}.1+\frac{1^6}{6!}.1+\frac{1^7}{7!}.1+\frac{1^8}{8!}.1+\frac{1^9}{9!}.1....+\frac{1^{n-1}}{(n-1)!}.1+\frac{1^n}{n!}.1 \\ \Leftrightarrow e^1 = \sum_{i=0}^{i=n}\frac{1^k}{k!}1 \\ \Leftrightarrow e^1 = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\frac{1}{5040}+....+\frac{1^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{1^n}{n!} \Leftrightarrow e^1 = 2{,}718\ 281\ 828..... \ e^x = 1+ \end{cases}$$

$$e^x = \sum_{i=0}^{i=n}\frac{x^k}{k!}x^0 \quad ?\,x^0$$

Règle de calcul :

$$\begin{cases} e^{a+b} = e^a.e^b \ ; \left(e^a\right)^2 = e^a.e^a = \\ e^m + e^n = k_1 \ ; e^m \times e^n = e^{m+n} = k_2 \ ; e^{2a} \Rightarrow \left(e^m\right)^n = e^{m.n} \\ \frac{1}{e^m} = e^{-m} ; \frac{e^m}{e^n} = e^{m-n} \ ; \\ \mathrm{e}^{1/2} = \sqrt{\mathrm{e}} \ ; \ \mathrm{e}^{\mathrm{m/n}} = \sqrt[\mathrm{n}]{\mathrm{e}^{\mathrm{m}}} \ ; \\ (-e)^{2k} = e^{2k} ; (-e)^{2k+1} = -e^{2k+1} \end{cases}$$

Valeurs numériques de e :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	2,7182818	7,3890561	20,085537	54,59815	148,41316	403,42879	1096,6332	2980,958	8103,0839
10	59874,142	162754,79	442413,39	1202604,3	3269017,4	8886110,5	24154953	65659969	178482301
20	1,319E+09	3,585E+09	9,745E+09	2,649E+10	7,2E+10	1,957E+11	5,32E+11	1,446E+12	3,931E+12
30	2,905E+13	7,896E+13	2,146E+14	5,835E+14	1,586E+15	4,311E+15	1,172E+16	3,186E+16	8,659E+16
40	6,398E+17	1,739E+18	4,728E+18	1,285E+19	3,493E+19	9,496E+19	2,581E+20	7,017E+20	1,907E+21
50	1,409E+22	3,831E+22	1,041E+23	2,831E+23	7,695E+23	2,092E+24	5,686E+24	1,546E+25	4,201E+25

Intégrale usuelle de fonction exponentielle :

$$f(x)=e^x \Leftrightarrow \int e^x dx = e^x$$
$$f(x)=\int u'e^u dx \Leftrightarrow \int u'e^u dx = e^u + k$$
$$f(x)=\int e^u dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{u'}u'e^u dx = \frac{1}{u'}e^u + k$$

L'élément différentielle est de la forme $e^u = d(e^u)$ tel que dx n'est pas la différentielle de $d(e^u)$. D'où nous posons u = k f (x) , soit $dv = k$

Exemple numérique usuel :

$$f(x)=e^x \Leftrightarrow \int e^x dx = e^x$$
$$f(x)=e^{2x} \Leftrightarrow I = \int 2e^{2x} dx = e^{2x} + k$$
$$f(x)=e^{2x} \Leftrightarrow \begin{cases} I = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}\, e^{2x} + k \\ v = e^{2x} \Leftrightarrow dv = 2e^{2x} \Rightarrow \int 2e^{2x} dx = e^{2x} \Rightarrow \frac{1}{2}\int 2e^{2x} dx = \frac{1}{2}2\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} \\ d(e^u) = e^u \neq du;\ u = 2x \Rightarrow du = 2dx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2}du \Rightarrow \int e^{2x} dx = \int \frac{1}{2}e^{2x} du = \frac{e^{2x}}{2} \end{cases}$$
$$f(x)=e^{2x} \Leftrightarrow I = \int (\frac{4}{3}e^{2x} + \frac{5}{4}e^{3x})dx = \frac{4}{3}\int e^{2x} dx + \frac{5}{4}\int e^{3x} dx = \frac{4}{3}\frac{1}{2}.e^{2x} + \frac{5}{4}.\frac{1}{3}.e^{3x} = \frac{4}{6}e^{2x} + \frac{5}{12}e^{3x} + k$$

Intégrale par partie d'exponentielle (tiré d'un livre Bordas 2007 + DEAU) :

$$\int dy = \int -(2x-1)e^{2x} dx = -\int (2x-1)e^{2x} dx$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int dy = \int d(uv) - \int vdu \quad ;\left(\int dy = y ; \int d(uv) = uv\ ; \int dv = v\right) \\ v = e^{2x} \Leftrightarrow dv = 2e^{2x} \Rightarrow \int 2e^{2x} dx = e^{2x} \Rightarrow \frac{1}{2}\int 2e^{2x} dx = \frac{1}{2}2\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} \\ u = -(2x-1) \Rightarrow du = -2dx \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2} \\ \begin{cases} \int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} \\ u = 2x \Leftrightarrow du = 2dx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2}du \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -(2x-1); du = -2 \Leftrightarrow dx = -\frac{1}{2}du \\ v = \int e^{2x} dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{e^{2x}}{2} \end{cases} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \int dy = \int d(uv) - \int vdu \Leftrightarrow y = uv - \int vdu$$
$$\Leftrightarrow y = \left(-(2x-1)\frac{e^{2x}}{2}\right) - \int (-2)\left(\frac{1}{2}\right)e^{2x} dx$$
$$\Leftrightarrow y = \left(-(2x-1)\frac{e^{2x}}{2}\right) - \frac{1}{2}e^{2x} \Leftrightarrow y = \frac{e^{2x}}{2}\left(-(2x-1)-1\right)$$

$$\begin{cases} \int dy = \int e^{2x-3}dx \\ u = 2x-3 \Rightarrow du = 2dx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2}du \end{cases} \Leftrightarrow \int e^{2x-3}dx = \int \frac{1}{2}e^{2x-3}du = \frac{1}{2}e^{2x-3}$$

Ou encore :

$$\int e^{2x-3}dx = \int \frac{1}{2}(2e^{2x-3})dx = \frac{1}{2}e^{2x-3}$$

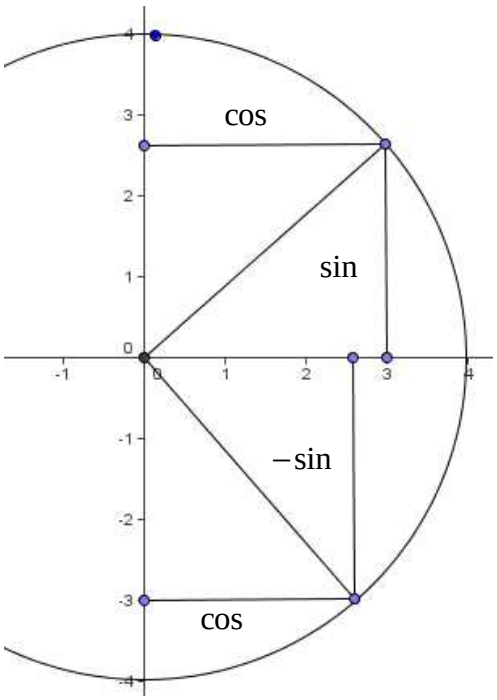
6) Fonction trigonométrique

$$f(x)=\sin(x)\Rightarrow F(x)+C=f'(x)=-\cos(x)$$
$$f(x)=\cos(x)\Rightarrow F(x)+C=f'(x)=\sin(x)$$

$$f(x)=\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\frac{U}{V}\Rightarrow F(x)+C=f'(x)=\frac{U'V-UV'}{V^2}=\frac{([\sin(x)][\cos(x)])}{[\cos(x)]^2}-\frac{([\sin(x)][\cos(x)]')}{[\cos(x)]^2}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\Rightarrow f'(x)=\frac{(\cos(x)\cos(x))}{[\cos(x)]^2}-\frac{(-\sin(x)\sin(x))}{[\cos(x)]^2}=1+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$$

En résumé :



$$\begin{cases} f(x)=\cos(x)\Rightarrow f'(x)=\sin(x) \\ f(x)=\sin(x)\Rightarrow f'(x)=-\cos(x) \\ f(x)=\tan(x)\Rightarrow f'(x)=1+\tan^2(x) \end{cases}$$

Par suite :

$$\begin{cases} f(x)=\sin(x)\Rightarrow \int f'(x)\,dx=\int \sin(x)\,dx=\cos(x)+C \\ f(x)=-\cos(x)\Rightarrow \int f'(x)dx=\int -\cos(x)=\sin(x)+C \\ f(x)=\cos(x)\Rightarrow \int f'(x)dx=\int \cos(x)=-\sin(x)+C \\ f(x)=1+\tan^2(x)\Rightarrow \int f'(x)dx=\int[1+\tan^2(x)]\,dx=\tan(x) \end{cases}$$

Cas particulier :

$$f(x)=\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\frac{U}{V}$$

mais aussi sin(x) représente la fonction dérivée de cos (x), soit on peut écrire encore :

$$f(x)=\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\frac{(-\cos(x))'}{\cos(x)}=-\frac{dV}{V}$$

Ors par définition des intégrales de fonctions logarithme, il vient que :

$$f(x)=\frac{1}{U}\Leftrightarrow \int\frac{1}{U}dx=\ln(U)$$

$$\int f(x)\,dx=\int\tan(x)\,dx=\int\frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx=\int\frac{dV}{V}=-\ln(V)+C=-Ln[\cos(x)]+C$$

Fonctions trigonométriques composées

Soit :

$$\begin{cases} f_1(x) = \sin(P(x)) \\ f_2(x) = \sin(P(x)) \\ f_3(x) = \sin(P(x)) \end{cases}$$ Où $P(x)$ est un polynôme quelconque de degré quelconque

Dans ce cas, on effectue un changement de variable où nous allons posons par simplicité $U = P(x)$. Des fonctions dérivées trigonométrique composées, il vient que :

$$f(x) = \cos(U) \Rightarrow f'(x) = -U'Sin(U) = F(x)$$
$$\Rightarrow F(x) = -U'S\text{in}(U) \xrightarrow{primitives} \cos(U)$$
$$\Leftrightarrow S\text{in}(U) \xrightarrow{\text{Primitives}} -\frac{\cos(U)}{U'}$$

$$f(x) = \sin(U) \Rightarrow f'(x) = U'Cos(U) = F(x)$$
$$\sin(U) \xrightarrow{dérivation} U'\cos(U) \Rightarrow U'\cos(U) \xrightarrow{\text{Primitives}} \cos(U)$$
$$\Leftrightarrow \frac{\cos(U)}{U'} \xrightarrow{dérivation} \sin(U) \Rightarrow \frac{\cos(U)}{U'} \xrightarrow{\text{Primitives}} \sin(U)$$

Par suite :

des dérivations de fonctions trigonométriques : $f(x) = \cos(U) \Rightarrow f'(x) = -U'Sin(U)$
Des intégrales scalaire : $\lambda(G(x) + C) = \int \lambda\ g(x)\ dx\ = \lambda \int\ g(x)\ dx$,
Il vient que :

Et donc leurs intégrales sont de la forme :

$$\int \frac{\cos(U)}{U'} dU = \frac{1}{U'} \int \cos(U) du = \sin(U) + C \Rightarrow \int \cos(U) du = \frac{\sin(U)}{U'} + C$$
$$\int \frac{\sin(U)}{U'} dU = \frac{1}{U'} \int \sin(U) du = -\cos(U) + C \Rightarrow \int \sin(U) du = \frac{\cos(U)}{U'} + C$$

Du Tableau des différentielles trigonométrique usuelles :

Fonctions	Fonctions dérivée	différentielles
$f(x)=\cos(x)$	$f'(x)=-\sin(x)$	$dy=-\sin(x)\,dx$
$f(x)=\sin(x)$	$f'(x)=\cos(x)$	$dy=\cos(x)\,dx$
$f(x)=\tan(x)$	$f'(x)=1+\tan^2(x)$	$dy=dx+\tan^2(x)dx$
$f(x)=-\cos(x)$	$f'(x)=\sin(x)$	$dy=\sin(x)\,dx$
$f(x)=-\sin(x)$	$f'(x)=-\cos(x)$	$dy=-\cos(x)\,dx$
$f(x)=-\tan(x)$	$f'(x)=-(1+\tan^2(x))$	$dy=-(dx+\tan^2(x)dx)$
$f(x)=\cos(U)$	$f'(x)=-\dfrac{\sin(U)}{U'}$	$dy=-\sin(U)\,dU$
$f(x)=\sin(U)$	$f'(x)=\cos(U)$	$dy=\cos(U)\,dx$
$f(x)=\tan(U)$	$f'(x)=U'+\tan^2(U)$	$dy=dU+\tan^2(U)dx$

On peut construire le Tableau des Intégrales usuelles trigonométrique :

Intégrale	Primitive
$\int dy=\int -\sin(x)\,dx$	$y=\cos(x)+k$
$\int dy=\int \sin(x)\,dx$	$y=-\cos(x)+k$
$\int dy=\int \cos(x)\,dx$	$y=\sin(x)+k$
$\int dy=\int -\sin(u)\,dx=\int -\sin(U)\dfrac{du}{u'}=\dfrac{1}{u'}\int -\sin(u)du$	$y=\dfrac{1}{u'}\cos(u)+k$
$\int dy=\int \cos(u)dx=\int \dfrac{\cos(u)}{u'}du=\dfrac{1}{u'}\int \cos(u)du$	$\dfrac{1}{u'}\sin(u)+k$

Exemples numériques :

$$\int -\sin(x)dx=-\int \sin(x)dx=-\cos(x))$$

$$\int \sin(x)dx=\int \sin(x)dx=\cos(x))$$

$$\int \cos(x)dx=\sin(x))$$

$$\int 2\cos(2x)dx=\int u'\cos(u)dx=\int \cos(u)u'dx=\int \cos(u)du=\sin(U)=\sin(2x)$$

$$\int 3\sin(3x)dx=\int \sin(3x)3dx=\int \sin(u)du=\cos(U)=\cos(3x)$$

A) fonction trigonométriques composées du premier degré :

Exemple numérique 1 : $\int 5\sin(5x+3)dx$

Intégrale de Fonctions trigonométriques composées :

$$f(x)=\cos(5x+3)\Rightarrow f'(x)=-5\sin(5x+3)$$
$$\Leftrightarrow \int 5\sin(5x+3)dx=-\cos(5x+3)$$
$$\Rightarrow \int \sin(5x+3)dx=\int \frac{1}{5}\sin(5x+3)du=-\cos(5x+3)$$

D'où :

$$\begin{cases}\int dy=\int \frac{4}{5}\cos(5x+3)\ dx \\ u=5x+3\Leftrightarrow du=5dx\Leftrightarrow dx=\frac{1}{5}du\end{cases}\Leftrightarrow y=\frac{4}{5}\int \cos(u)\ \frac{du}{u'}=-\frac{4}{5}\frac{1}{5}\sin(u)=-\frac{4}{25}\sin(5x+3)du$$

Exemple littérale et numérique 2 : $f(x)=\int \sin(4x+2)dx$

Effectuons le changement de variable $U=4x+2\Rightarrow U'=4\Leftrightarrow U'dx=dU=4$

D'où de : $\begin{cases}\int dy=\int \cos(U)\ dx\Leftrightarrow \int dy=\int \cos(f(u))\ dx \\ U=f(u)\Rightarrow dU=f'(u)dx\Leftrightarrow dx=\frac{dU}{f'u)}\Leftrightarrow dx=\frac{du}{u'}\end{cases}$,

$$\Leftrightarrow y=\int \frac{\cos(U)}{U'}\ dU=\sin(U)\frac{dU}{U'}+C=\frac{\sin(U)}{U'}du+C$$

on a :

$$\int \sin(4x+2)dx=\frac{1}{4}\cos(4x+2)+c$$

Exemple numérique 3 : $f(x)=\int \cos^2(x)dx$

Ors des formules sur les lignes trigonométriques :

$$\begin{cases}f(x)=\int \cos^2(x)dx \\ \cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)=2\cos^2(x)-1\Leftrightarrow \cos^2(x)=\frac{\cos(2x)-1}{2}\end{cases}$$

$$d'où\ \left\{\int \cos^2(x)dx=\int\left(\frac{\cos(2x)-1}{2}\right)\ dx\right.$$

$$\Leftrightarrow \int \cos^2(x)dx=\int \cos(2x)dx+\frac{1}{2}\int dx$$

$$\Leftrightarrow \int \cos^2(x)dx=\frac{1}{2}\sin(2x)+\frac{1}{2}x$$

Formulaire :

1) Intégrale indéfni de fonctions usuelles et fonctions composées

- Relation de chasles ou additivité ou linéarité de l'intégrale
- Scalairité de l'intégrale
- Fonction polynomiales

$$\int F(x)\,dx = \int x^n \;dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

- Fonctions rationnelles

$$\int \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$$

- Fonctions irrationnelles

$$\int x^{\frac{p}{q}}\,dx = \frac{x^{\frac{p+1}{q}}}{\frac{p+1}{q}} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{p}{q} > 0 \Rightarrow \int \sqrt[q]{x^p}\;dx = \frac{q\sqrt[q]{x^{p+1}}}{p+1} \\ \frac{p}{q} = 0 \Rightarrow \int \sqrt[q]{x^p}\;dx = x^1 \\ \frac{p}{q} < 0 \Rightarrow \int \sqrt[q]{x^p}\;dx = \frac{q}{p+\sqrt[q]{x^{p+1}}} \end{cases}$$

- Fonctions logarithmiques

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{dx}{x} = \log(x) + c \;\; ; \;\; \int \frac{du}{u} = \ln(u) + c$$

- Fonctions exponentielles

$$f(x) = \int a\; e^k dx = a\int\; e^k dx = e^u + k \;\; ; \;\; f(x) = \int e^u dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{u'} u' e^u dx = \frac{1}{u'} e^u + k$$

- Fonctions trigonométriques

$$\begin{cases} \int \cos(x) = \sin(x) + C \\ \int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C \\ \int \left[1 + \tan^2(x)\right] dx = \tan(x) + C \end{cases} \qquad \begin{cases} \int \cos(U)du = \frac{\sin(U)}{U'} + C \\ \int \sin(U)du = -\frac{\cos(U)}{U'} + C \\ \int \tan(U)du = \end{cases}$$

- Fonctions trigonométriques réciproque
- Fonctions trigonométriques hyperboliques

Exercices résolues

Effectuer la dérivation de : $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x+4}$

f(x), fonction rationnelle, existe si et seulement si son dénominateur est non nul, soit si $x+4\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -4$, Par suite f(x) est définie sur l'ensemble ou intervalle $\mathrm{I}=\left]-\infty;-4\right]\cup\left[-4;+\infty\right[$, d'où cette fonction est dérivable dans cet ensemble de définition I.

En appliquant la formule de dérivation des fonctions rationnelles composées

$$f(x)=\frac{U}{V}\Rightarrow f'(x)=\frac{U'V-UV'}{V^2}$$

on obtient :

$$f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x+4}\Rightarrow f'(x)=\frac{(2x-3)(1x+4)-(1x^2-3x+1)(1)}{(x+4)^2}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{x^2+8x-13}{(x+4)^2}$$

$$où\begin{cases}(2;-3)(1;4)=(2.1;(2.4)+(-3.1);(-3.4)=(2;8-3;-12)=(2;5;-12)\\(2;5;-12)-(1;-3;1)=(1;8;-13)\end{cases}$$

Exercices numériques :

Fonction polynomiales

Fonctions rationnelles

Dérivation usuelles	Intégrale indéfinie usuelle
Fonctions polynomiales	
$f(x)=a_k x^n \Rightarrow f'(x)=a_k n x^{n-1}$	$\int a_k n x^{n-1}\,dx = a_k x^n + C$
$f(x)=a_k x^{n+1} \Rightarrow f'(x)=a_k n x^n$	$\int a_k x^{n+1}\,dx = a_k \frac{x^n}{n+1} + C$
Fonctions rationnelles	
$f(x)=\ln(x) \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x)$
$f(x)=\frac{1}{x^n}=x^{-n} \Rightarrow f'(x)=-nx^{-n-1}=-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\int -\frac{n}{x^{n+1}}\,dx = \frac{nx^{-n-1+1}}{-n-1+1}+c=\frac{1}{x^n}+c$
	$\int \frac{k}{x^n}\,dx = \frac{kx^{-n+1}}{-n+1}+c=-\frac{k}{(n-1)x^{n+1}}+c$
Fonctions irrationnelles	
$f(x)=\sqrt{x}=x^{1/2} \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\int -\frac{2}{\sqrt{x}}\,dx=\int -\frac{2x^{-\frac{1}{2}}}{2}\,dx=-2\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1}=\sqrt{x}+c$
$f(x)=\sqrt{x^n} \Rightarrow f'(x)=-\frac{n}{2}x^{\frac{n}{2}-1}$	$\int -\frac{n}{2}x^{\frac{n}{2}-1}\,dx=\sqrt{x^n}+C$
	$\int \sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2}+C$
	$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx=\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+c=\frac{1}{2\sqrt{x^2}}+C$
Fonctions trigonométriques	
$f(x)=\cos(x) \Rightarrow f'(x)=\sin(x)$	$\int \sin(x)\,dx=\cos(x)$
$f(x)=\sin(x) \Rightarrow f'(x)=-\cos(x)$	$\int \cos(x)\,dx=-\sin(x)$
$f(x)=\tan(x) \Rightarrow f'(x)=1+\tan^2(x)$	$\int 1+\tan^2(x)\,dx=\tan(x)$
Fonction logarithmique	
$\int \ln(x)=$	
Fonctions exponentielles	
$\int e^x dx = e^x + c$	