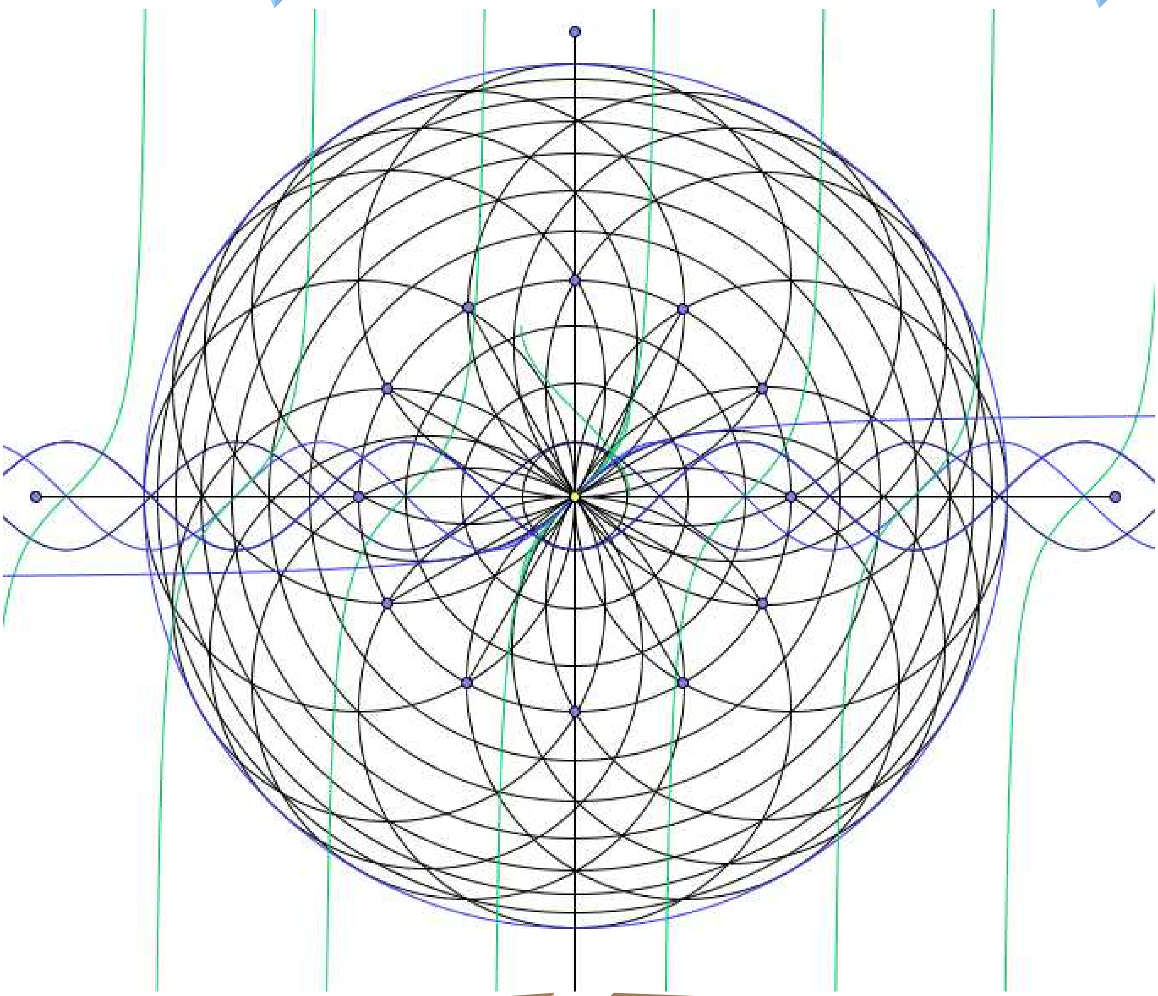
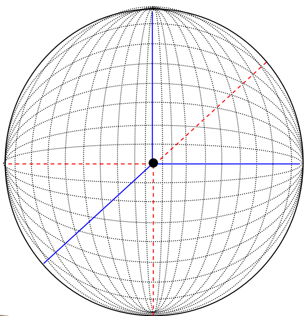
TECHNIQUE DES MATHEMATIQUES



GEOMETRIE



ANALYTIQUE

29/05/09
13/11/11

DAVID ($\mathcal{L}$ ittéraliste $\mathcal{F}$reelance; **39 ans** ; niveau **IV** +)

TECHNIQUE DES MATHEMATIQUES

LA TRIGONOMETRIE

GEOMETRIE ANALYTIQUE

1ère C,D,E	1ère S
1ère F	1ère STI
D.E.A.U	Prépa Bac

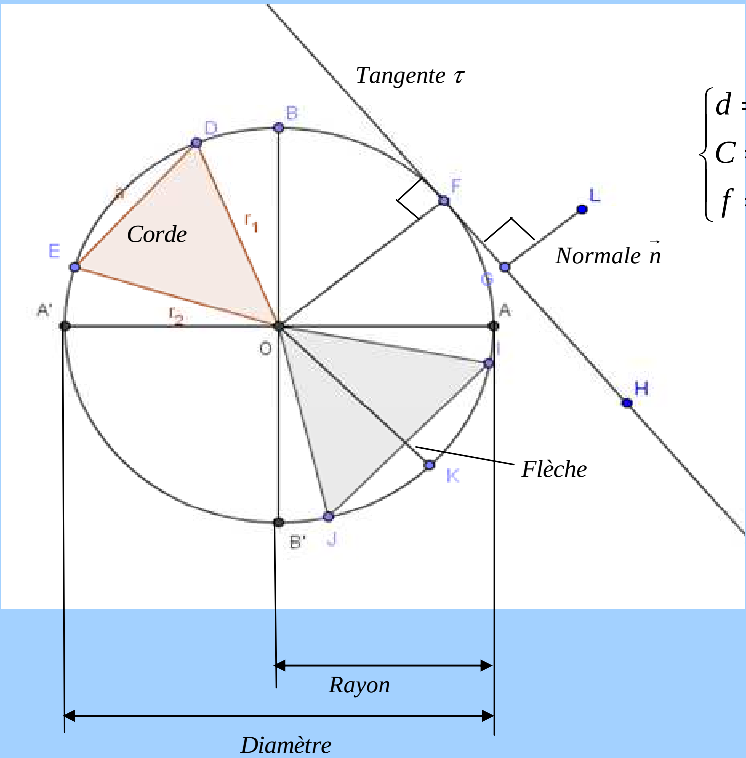
Les Jimmy ou Jim Morisson (Année 60) : Faculté : 20 page scriptural en 2 h, donc à réduire les étapes intermédiaires, à ne pas écrire. Celles que vous pensez pouvoir vous souvenir sans mal. En exam, construire tes repères ultra rapides. Construction du formulaire 15 min max lors du partiel, et 15 min l'ensemble du formulaire mathématique. Je ne plaisante pas. La trigonométrie est à la fois assez facile pour nous, mais à prendre très au sérieux. Mon premier partiel de la première année 07 avant d'obtenir la seconde année 13. C'est à la fois le déclic, la mise en confiance avant le crescendo des notes. Notre maximale : 17, Vitesse de croisière : 15

Dernière chose : Dieu. Belle question philosophique entre 15 et 20 ans auxquelles on ne croit pas. Qu'est ce que tu veux que je te dise : fais un sport d'ordre sphérique. Tu verras. Certains joueurs ont un double fond, qu'il ne font pas, certaines trajectoires sont totalement logique et non numériques (courbes). Quand à ceux ou celle qui y croit ou qui la voit, ils et elles lui obéissent, et ont la trouille (le non dit absolue). Quand à nous, quand nous avons la vision d'ensemble (pol, éco, science, math) et quand seulement les faits sont d'une gravité importante à extrême, ce n'est qu'à partir de ce moment que nous la laissons effectuer ses manoeuvre (Dépassement de la dette de 50 à 60 %, taux d'investissement sup à 100 par rapport à la dette immo, violences physique, drogue, viols, ect). Ah, à travers les enfants, elle en rit quand nous abandonnons le combat. De manière générale, nous, on l'aime bien, malgré ces maintes défaut, elle a déjà 40 milliard d'année d'existence, et franchement, elle en sait bien plus que moi, sur la nature de l'être humain, dès notre naissance.

SYNTHESE :

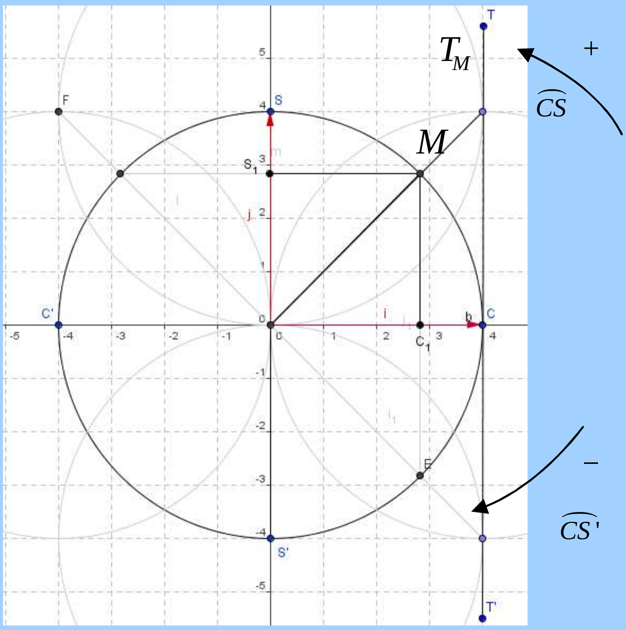
A TOUTES LES EPOQUES :
<u>LA PHOTOS ET LA VITESSE ONT TOUJOURS FAIT LA DIFFERENCE</u>

Le cercle :



$$\begin{cases} d = diamètre \\ C = corde \\ f = flèche \end{cases} \qquad \begin{aligned} & d = \frac{c^2}{4f} + f = \alpha = \frac{360°.\, l}{\pi d} \\ & C = 2\sqrt{f(d-f)} \\ & f = \frac{d - \sqrt{d^2 - C^2}}{2} \end{aligned}$$

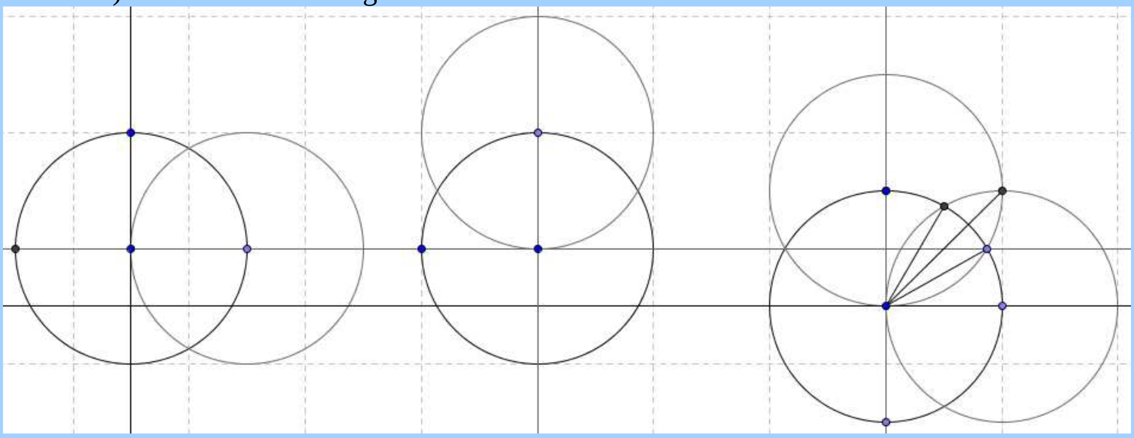
Le cercle trigonométrique :



CC' axe des cosinus
SS' axe des sinus
TT' axe des Tangente
$\overset{\frown}{CS}$ sens direct ou sens indirect
$\overset{\frown}{CS'}$ sens négatif ou indirect
$\overset{\frown}{OM} = \alpha$
$OC_1 = \cos(\alpha)$
$OS_1 = Sin(\alpha)$
$C\,T_M = Tan(\alpha)$

a) Théorème de Pythagore

b) Construction des angles :



b) Ligne trigonométriques remarquable (Valeur angulaire et métrique) :

Valeur remarquable angulaire (En radian sur le cercle) :

$$\widehat{CC} = \widehat{Cm_1} + \widehat{m_1m_2} + \widehat{m_2S} + \widehat{Sm_3} + \widehat{m_3m_4} + \widehat{m_4C'} + \widehat{C'm_5} + \widehat{m_5m_6} + \widehat{m_6S'} + \widehat{S'm_7} + \widehat{m_7m_8} + \widehat{m_8C}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{CC} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \widehat{CC} = \sum_{1}^{12}\left(\frac{1}{6}\pi\right)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{6};\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{4}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi;\frac{5}{6}\pi;\frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi;\frac{5}{6}\pi;\frac{6}{6}\pi = \pi;\frac{7\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi;\frac{8}{6}\pi = \frac{4}{3}\pi;\frac{9}{6}\pi = \frac{3}{2}\pi;\frac{10}{6}\pi = \frac{5}{3}\pi;\frac{11}{6}\pi;\frac{12}{6}\pi = 2\pi \\ \begin{cases} \boxed{\frac{\pi}{6}};\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \boxed{\frac{1}{3}\pi};\ \frac{1}{3}\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6}\pi = \boxed{\frac{1}{2}\pi}\ ;\ \frac{1}{2}\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{3+1}{6} = \frac{4}{6}\pi = \boxed{\frac{2}{3}\pi};\frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{5}{6}\pi};\frac{5}{6}\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi}{6} = \pi \\ \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi;\frac{7}{6}\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{8}{6}\pi = \frac{4}{3}\pi;\frac{4}{3}\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{4.2+1}{6}\pi = \frac{9}{6}\pi;\frac{9}{6}\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{10}{6}\pi = \frac{5}{3}\pi;\frac{5}{3}\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{10+1}{6}\pi = \frac{11}{6}\pi;\frac{12}{6}\pi = \frac{\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

d) Valeurs remarquables axiales (sur les axes) :

Du théorème de Pythagore :

$$(OS_3)^2 + (OC_1)^2 = (OM_1)^2 \Leftrightarrow (OC_1) = \sqrt{(OM_1)^2 - (OS_3)^2} = \sqrt{(1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4-1}{4}\right)} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow (OS_3;OC_1) = \left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

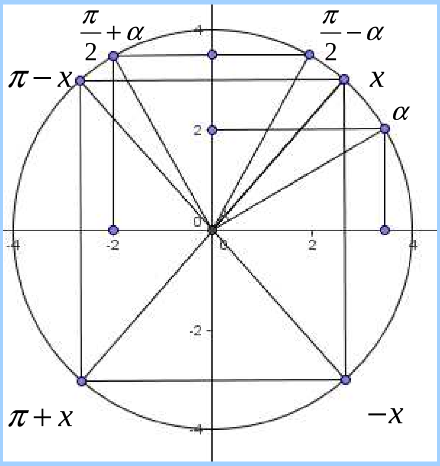
$$(OS_3)^2 + (OC_1)^2 = (OM_1)^2 \Leftrightarrow (OS_3) = \sqrt{(OM_1)^2 - (OC_1)^2} = \sqrt{(1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4-1}{4}\right)} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow (OC_1;OS_3) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{cases} (OC_1)^2 + (OS_1)^2 = (OM_1)^2 \\ (OC_1)^2 = (OS_1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow (OC_1)^2 + (OC_1)^2 = (1)^2 \Leftrightarrow 2OC_1 = 1 \Leftrightarrow OC_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow (OC_1;OS_3) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

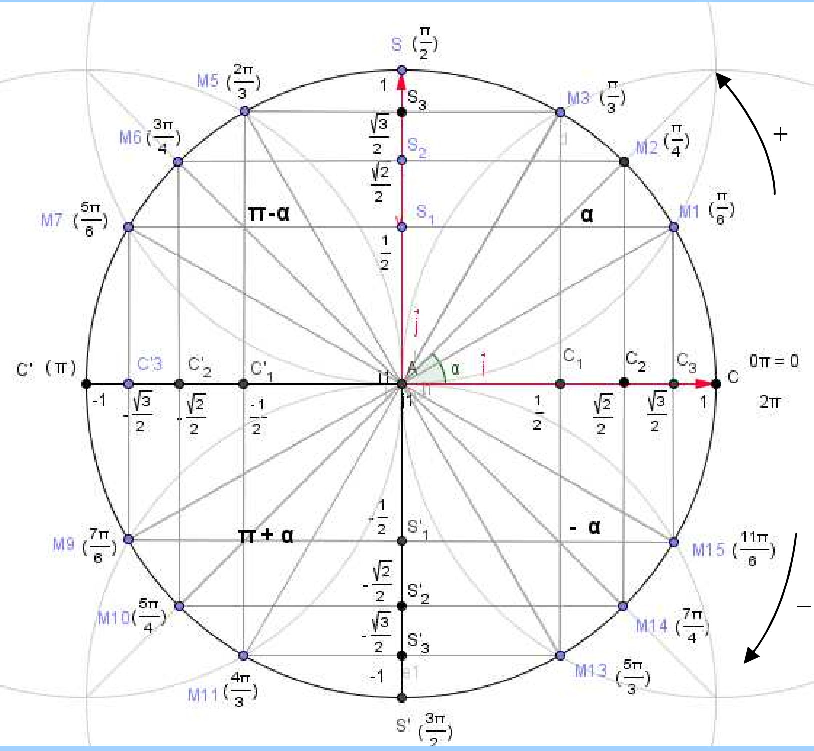
e) les formules des symétries trigonométriques :

$$\begin{cases}\cos(\pi-x)=-\cos(x)\\ \sin(\pi-x)=\sin(x)\\ \tan(\pi-x)=-\tan(x)\end{cases}\quad\begin{cases}\cos(\pi+x)=-\cos(x)\\ -\sin(\pi+x)=-\sin(x)\\ \tan(\pi+x)=\tan(x)\end{cases}\quad\begin{cases}\cos(-x)=\cos(x)\\ \sin(-x)=-\sin(x)\\ \tan(-x)=-\tan(x)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin(\alpha)\\ \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos(\alpha)\\ \tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\dfrac{1}{\tan(\alpha)}\end{cases}\quad\begin{cases}\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin(\alpha)\\ \sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos(\alpha)\\ \tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\dfrac{1}{\tan(x)}\end{cases}$$



f) Les Lignes trigonométriques :



APRES CE N'EST QU'UNE QUESTION D'ORGANISATION :

$$(\cos\quad\sin\quad\tan)^{\circ}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\ \left(\frac{3\pi}{4}\right)\\ \left(\frac{5\pi}{6}\right)\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ \left(\frac{\pi}{4}\right)\\ \left(\frac{\pi}{3}\right)\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\\ \left(-\frac{3\pi}{4}\right)\\ \left(-\frac{5\pi}{6}\right)\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\\ \left(-\frac{\pi}{4}\right)\\ \left(-\frac{\pi}{3}\right)\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \sqrt{3}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -\sqrt{3}\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

- Formules d'additions trigonométriques :

$$\begin{cases}\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)\\ \cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)\end{cases}\quad \begin{cases}\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)=\cos\left(\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)+(-b)\right)\\ \sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)=\sin(a-(-b)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)\\ \cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)\\ \tan(a-b)=\dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}\end{cases}\quad \begin{cases}\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)\\ \cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)\\ \tan(a+b)=\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}\end{cases}\ ;\ \frac{f(a-b);f(a+b)}{\cos(a)\cos(b)}$$

- Formules de duplication :

$$Cos(2a)=\cos(a+a)=\cos(a).\cos(a)-\sin(a).\sin(a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)$$

$$\sin(2a)=\sin(a+a)=\sin(a).\cos(a)+\cos(a).\sin(a)=2\sin(a)\cos(a)$$

$$\tan(2a)=\tan(a+a)=\frac{\tan(a)+\tan(a)}{1-\tan(a)\tan(a)}=\frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

$$\cos^2(a)+\sin^2(a)=1\Leftrightarrow\left(\sin^2(a)=1-\cos^2(a);\left(\sin^2(a)=1-\sin^2(a)\right)\right)$$

$$Cos(2a)=\cos^2(a)-(1-\cos^2(a))\Leftrightarrow\cos^2(a)=\frac{\cos(2a)-1}{2}$$

$$Cos(2a)=\left(1-\sin^2(a)\right)-\sin^2(a)\Leftrightarrow\ \sin^2(x)=\frac{1-\cos(2a)}{2}$$

$$\left|\begin{array}{l}\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)\\ \Leftrightarrow Cos(3a)=\cos(a)\cos(2a)\\ \Leftrightarrow\cos(3a)=\cos(a)(\cos^2(a)-\sin^2(a))+\sin(a)(2\sin(a)\cos(a)\\ \Leftrightarrow\cos(3a)=\cos^3(a)-3\sin^2(a)\cos(a)\\ \Leftrightarrow\cos(3a)=\cos^3(a)-3\cos(a)(1-\cos^2(a))\\ \cos(3a)=4\cos^3(a)-3\cos(a)\end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l}\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\cos(b)\\ \Leftrightarrow\sin(2a)=\sin(2a+a)\\ \Leftrightarrow\sin(3a)=2\sin(a)\cos^2(a)-(\cos^2(a)-\sin^2(a))\sin(a)\\ \Leftrightarrow\sin(3a)=3\sin(a)\cos^2(a)-\sin^3(a)\\ \Leftrightarrow\sin(3a)=3\sin(a)(1-\sin^2(a))-\sin^3(a)\\ \Leftrightarrow\sin(3a)=3\sin(a)-4\sin^3(a)\end{array}\right.$$

- Formules des Produits trigonométriques :

$$\begin{cases}\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)\\ \cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)\end{cases}\quad\begin{cases}\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)\\ \sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)\end{cases}$$

$$\left|\begin{array}{l}\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos(a).\cos(b)\\ \cos(a+b)-\cos(a-b)=-2\sin(a).\sin(b)\\ \sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin(a).\cos(b)\\ \sin(a+b)-\sin(a-b)=2\cos(a).\sin(b)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}\cos(a+b)+\cos(a-b)=\cos(b).\cos(a)\\ -\dfrac{1}{2}\cos(a+b)-\cos(a-b)=\sin(a).\sin(b)\\ \dfrac{1}{2}\sin(a+b)+\sin(a-b)=\sin(a).\cos(b)\\ \dfrac{1}{2}\sin(a+b)-\sin(a-b)=\cos(a).\sin(b)\end{array}\right.$$

- Equations trigonométriques :

a) Equation des lignes trigonométriques (avec l'écriture matricielle) :

$$\left(arc\sin(x);arc\cos(x);arc\tan(x)\right)=arc\begin{pmatrix}sin\\ \cos\\ \tan\end{pmatrix}^{t}\circ(x)=\left(\alpha;\overline{\alpha}\right)+\begin{pmatrix}2k\pi\\ 2k\pi\\ k\pi\end{pmatrix}^{t}\quad où\, k\in\mathbb{Z}$$

$$Arc\left(\begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix}\atop \tan\right)^{t}\circ\left(\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}\right)=\left(\left(\begin{pmatrix}\frac{\pi}{6};-\frac{\pi}{6}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\frac{\pi}{3};\pi-\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\frac{\pi}{4};-\frac{\pi}{4}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\frac{\pi}{4};\pi-\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{3}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\frac{\pi}{6};\pi-\frac{\pi}{6}\end{pmatrix}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\pi}{3}\\ \frac{\pi}{4}\\ \frac{\pi}{3}\end{pmatrix}\right);\left(\left(\begin{pmatrix}\frac{5\pi}{6};-\frac{5\pi}{6}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-\frac{\pi}{6};-\pi-\frac{\pi}{6}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\frac{3\pi}{4};-\frac{3\pi}{4}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-\frac{5\pi}{4};-\pi-\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\frac{2\pi}{3};-\frac{2\pi}{3}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-\frac{5\pi}{6};-\pi-\frac{\pi}{6}\end{pmatrix}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{\pi}{3}\\ -\frac{\pi}{4}\\ -\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}\right)$$

b) Equation trigonométriques du premier degré :

$$\begin{cases}a\cos(x)+b\sin(x)=c\\ a=r\cos(\alpha)\\ b=r\sin(\alpha)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)\\ a\cos(x)=r\cos(\alpha)\cos(x)\\ b\sin(x)=r\sin(\alpha)\sin(x)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a\cos(x)+b\sin(x)=r\cos(\alpha)\cos(x)+r\sin(\alpha)\sin(x)\Leftrightarrow a\cos(x)+b\sin(x)=r\cos(x-\alpha)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a\cos(x)+b\sin(x)=r\cos(x-\alpha)\\ a\cos(x)+b\sin(x)=c\end{cases}\Leftrightarrow r\cos(x-\alpha)=c\Leftrightarrow\begin{cases}\cos(x-\alpha)=\frac{c}{r}\\ r=\sqrt{a^2+b^2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}arc\cos(x-\alpha)=(x-\alpha)\\ \cos(x-\alpha)=\frac{c}{r}\Leftrightarrow(x-\alpha)=\arccos\left(\frac{c}{r}\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}Si\,\frac{c}{r}>1\;et\,\frac{c}{r}<-1<-1\,;\Rightarrow(x-\alpha))=\varnothing\\ Si\,-1<\frac{c}{r}<1\,;alors:(x-\alpha))=\arccos\left(\frac{c}{r}\right)=\beta\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow(x-\alpha)=(\beta+2k\pi;\overline{\beta}+2k\pi)\Leftrightarrow\left(x_1;x_2\right)=\left((\alpha+\beta+2k\pi);(\alpha-\beta+2k\pi)\right)$$

c) système d'équations trigonométrique :

$$\begin{cases}a\cos(\alpha)+b\sin(\beta)=c\\ a'\cos(\alpha)+b'\sin(\beta)=c'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}aX+bY=c\\ a'X+b'X=c'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a & b\\ a' & b'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\ c'\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b}\\ \frac{c'a-a'c}{ba'-b'a}\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{c'a-a'c}{ba'-b'a}\\ \frac{cb'-c'b}{ab'-a'b}\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos(\alpha)\\ \sin(\beta)\end{cases}=\begin{pmatrix}\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b}\\ \frac{c'a-a'c}{ba'-b'a}\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}(\alpha;\overline{\alpha})\\ (\beta;\overline{\beta})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}arc\cos\left(\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b}\right);-arc\cos\left(\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b}\right)\\ arc\sin\left(\frac{c'a-a'c}{ba'-b'a}\right);\pi-arc\sin\left(\frac{c'a-a'c}{ba'-b'a}\right)\end{pmatrix}$$

d) Equation trigonométrique du second degré :

$$\begin{cases}a_1\cos^2(\alpha)+b_1\cos(\alpha)=c_1\\ a_2\sin^2(\alpha)+b_2\sin(\alpha)=c_2\\ a_3\sin^2(\alpha)+b_3\sin(\alpha)=c_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f_1^2(\alpha)+f_1(\alpha)=c_1 & \Leftrightarrow f_i^2(\alpha)+f_i(\alpha)=c_i\\ f_2^2(\alpha)+f_2^2(\alpha)=c_2 & \Leftrightarrow f_i^2(\alpha)+f_i(\alpha)-c_i=0\\ f_3^2(\alpha)+f_3^2(\alpha)=c_3 & \Leftrightarrow b_iX^2+b_iX+k_i=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Delta=b_i^2-4a_ik_i\\ \Delta\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X=\frac{-b_i-\sqrt{b_i^2-4a_ik_i}}{2a_i}\\ X=\frac{-b_i-\sqrt{b_i^2-4a_ik_i}}{2a_i}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}arc(f(\alpha))=arc\,f(X)\\ arc(f(\alpha))=arc\,f(X)\end{cases}$$

$$avec\;(arc\cos;arc\sin;arc\tan)^{\circ}(X)=\left(\alpha+2k\pi;-\alpha+2k\pi\right);\left(\alpha+2k\pi;\pi-\alpha+2k\pi\right);\alpha+k\pi;\forall k\in\mathbb{Z}$$

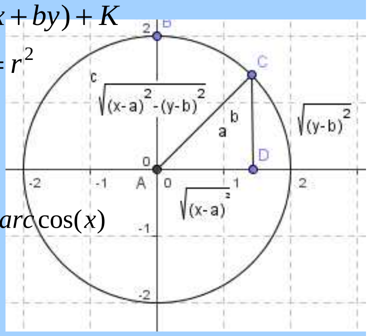
■ Equation du cercle :

● Equation développée du cercle (Du th. de Pythagore $a^2+b^2=r^2$ *où* $r=rayon$;

Sur son axe : $C_0(x)=x^2+y^2-r^2$

Désaxée de son axe : $C(x)=(x+a)^2+(y+b)^2-r_b \Leftrightarrow C(x)=x^2+y^2+2(ax+by)+K$

En réalité : $(x-x_a)^2+(y-y_b)^2=r^2 \Leftrightarrow (x^2-2ax_a+a^2)+(y^2-2ay_b+b^2)=r^2$



● Equation polaire :

$$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1 \;;\; \begin{cases} R(O;\vec{i};\vec{j}) \\ x=r\sin(\alpha) \\ y=r\cos(\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow f(\alpha)=(r;\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} r=\sqrt{a^2+b^2} \\ \alpha=arc\sin(x)\bigcap arc\cos(x) \end{cases}$$

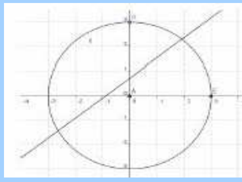
● Equation d'un cercle et d'une droite sur le même axe

Equation de la droite dans $R(O;\vec{i};\vec{j})$

$$(P_1;P_2;P)\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \text{ tel que } \overrightarrow{P_1P_2}=k\,\overrightarrow{P_1P} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-x_1 \\ y-y_1 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-x_1 \\ y-y_1 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x-x_1=k\,(a_1) \\ y-y_1=k\,(b_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\dfrac{x-x_1}{a_1} \\ k=\dfrac{y-4}{b_1} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_1 & a_1 \\ y-y_1 & b_1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow b_1(x-x_1)-a_1(y-y_1)=0$$

$$\Leftrightarrow b_1x-a_1y+(-b_1x_1+a_1y_1)=0 \Leftrightarrow D(x):b_1x-a_1y-c=0 \Leftrightarrow D(x)=b_1x-a_1y-c$$



Equation du cercle dans $R(O;\vec{i};\vec{j})$

$$\begin{cases} (O;C_n)\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow (O;C_n)=\begin{pmatrix} x_3-0 \\ y_3-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow r=\sqrt{(x_3)^2+(y_3)^2}=\sqrt{(x_3)^2}=x_3 \\ C(x):x^2+y^2=r^2 \Leftrightarrow C(x)=x^2+y^2-r^2 \end{cases}$$

$$C(x)\bigcap D(x)=\bigcup_{i=1}^{i=2}OM_i \Leftrightarrow \begin{cases} D(x):b_1x-a_1y=c \\ C(x):x^2+y^2=r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1y^2=(-b_1x+c)^2 \\ a_1y^2=a_1(r^2-x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} D(x)=b^2x^2-2bcx+c^2=a_1r^2-a_1x^2 \\ C(x)=(b^2-a)x^2-(2bc)x+\left(c^2-ar^2\right) \end{vmatrix}$$

$$Ax^2-Bx+C=0 \Rightarrow Si\Delta\geq 0 \text{ alors } \left((x_1;x_2);(y_1;y_2)\right)=\left(\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A};\frac{-b_1(x_1;x_2)+c^2}{a_1}\right)$$

● Equation de deux cercle sur le même axe :

$$\left(C_1(R)=C_2(R)=r\;;\;O(0;0)\;;O'(a;0);\left\|\overline{OO'}\right\|=a\right) \Leftrightarrow \begin{cases} C_1(x)=x^2+y^2-r_1^2 \\ C_2(x)=(x-a)^2+y^2-r_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1^2=r_1^2-x^2 \\ y_2^2=(x-a)^2-r_2^2 \end{cases}$$

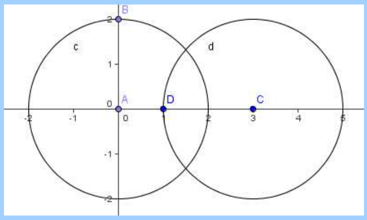
$$C_1(x)\bigcap C_2(x) \Leftrightarrow C_1(x)=C_2(x) \Leftrightarrow x^2+y^2-r_1^2=x^2+y^2-2ax+(a^2-r_2^2)$$

$$\Leftrightarrow 2ax_2=-a^2+(-r_2^2+r_1^2) \Leftrightarrow x=x_2=\frac{a^2+(-r_2^2+r_1^2)}{2a}=\frac{a^2+(r_2^2-r_1^2)}{2a}=\frac{A}{B};Si\,r_1=r_2 \Rightarrow (r_2^2-r_1^2)=0$$

$$\Rightarrow y_1=P\left(\frac{A}{B}\right) \Leftrightarrow y_1^2=r_1^2-x_2^2 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{r_1^2-\left(\frac{A}{B}\right)^2}=P\left(\frac{A}{B}\right)$$

$$\Leftrightarrow (M_1;M_2)\left(\bigcup_{i=1}^{i=2}M_i\right)\left(\bigcup_{i=1}^{i=2}x_i;y_i\right)=\left(\left(\frac{A}{B};P\left(\frac{A}{B}\right)\right);\left(\frac{A}{B};P\left(\frac{A}{B}\right)\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow (M_1;M_2)=(x_2;y_1)(x_2;-y_1)$$



- Equation de cercles désaxées de leurs axes :

On note $(x_a;x_b)$ et $(y_a;y_b)$ les coordonnées de A et B. les équations des deux cercles sont donc :

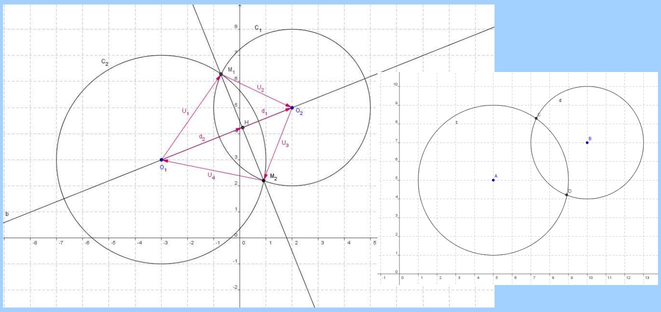
$$\begin{cases}(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r_a^{\,2}\\(x-x_2)^2+(y-y_2)^2=r_b^{\,2}\end{cases}\&\begin{cases}X=x-x_2\\Y=y-y_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=X+x_1\\y=Y+y_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(X+x_2-x_1)^2+(Y+y_2-y_1)=r_a^{\,2}\\(X+x_2-x_2)^2+(Y+y_2-y_2)^2=r_b^{\,2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}(X+x_a)^2+((Y+y_a))=r_a^{\,2}\\(X)^2+(Y)^2=r_b^{\,2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(X^2-2x_aX+x_a^{\,2})+(Y^2-2y_aY+y_a^{\,2})=r_a^{\,2}\\X^2+Y^2=r_b^{\,2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(X^2+Y^2-2x_aX-2y_aY+(+x_a^{\,2}+y_a^{\,2})=r_a^{\,2}\\X^2+Y^2=r_b^{\,2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X^2+Y^2=r_a^{\,2}-2x_bX-2y_bY-y_b^{\,2}-x_b^{\,2}\\X^2+Y^2=r_b^{\,2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow r_a^{\,2}-2x_bX-2y_bY-y_b^{\,2}-x_b^{\,2}=r_b^{\,2}\qquad\Leftrightarrow r_a^{\,2}-r_b^{\,2}-2x_bX-2y_bY-y_b^{\,2}-x_b^{\,2}=0$$

$$\Leftrightarrow -2x_bX-2y_bY=r_a^{\,2}-r_b^{\,2}+y_b^{\,2}+x_b^{\,2}$$



En posant :

$a=2x_b\quad b=2y_b\quad c=r_a^{\,2}-r_b^{\,2}+y_b^{\,2}+x_b^{\,2}$

On peut écrire la droite d'équation suivante :

$$(-2x_b)x-(2y_b)y\;=\;\left(r_a^{\,2}-r_b^{\,2}+y_b^{\,2}+x_b^{\,2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad a\;x\;+\;b\;y\;=\;c$$

$$\Leftrightarrow\quad b\;y\;=c-a\;x$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b^2Y^2=(c-ax)^2\\x^2+Y^2=r_a^{\,2}\Leftrightarrow Y^2=r_a^{\,2}-x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b^2Y^2=(c-ax)^2\quad\Leftrightarrow b^2Y^2=c^2-2aX+a^2X^2\\b^2Y^2=r_a^{\,2}-b^2X^2\Leftrightarrow b^2Y^2=b^2(r_a^{\,2}-X^2)=b^2r_a^{\,2}-b^2X^2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow b^2r_a^{\,2}-b^2X^2=c^2-2aX+a^2X^2\qquad\Leftrightarrow(b^2-a^2)X^2-2aX-(b^2r_b^{\,2}-c)=0$$

$$\Leftrightarrow(b^2+a^2)X^2-2aX+(c-b^2r_b^{\,2})=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}4\left[(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2\right]X^2\\-2\left(2(x_b-x_a)\left[\left(r_a^{\,2}-r_b^{\,2}-(y_b-y_a)^2-(x_b-x_a)^2\right)\right]\right)X\\\left[\left(r_a^{\,2}-r_b^{\,2}-(y_b-y_a)^2-(x_b-x_a)^2\right)\right]^2-\left(4(y_b-y_a)\right)^2r_b^{\,2}\end{pmatrix}^{+}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}AX^2\\BX\\C\end{pmatrix}^{t}=0\Leftrightarrow AX^2+BX+C=0$$

L'Equation précédente s'écrit : $Ax^2+Bx+C=0$ avec $\Delta=B^2-4AC$ tel que son discriminant réduit est : $\Delta=(4(x_{ba}^{\,2}y_{ba}^{\,2}r_b^{\,2}+y_{ba}^{\,4}r_b^{\,2})-(y_{ba}^{\,2}k^2)$

$Si\ \Delta>0\Rightarrow\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}^{t}=(X_1;X_2)=\left(\dfrac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A};\dfrac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}\right)$,alors les 2 cercles sont sécants

$Si\,\Delta=0\Rightarrow X_1=X_2=\dfrac{-B}{2A}$, alors les deux cercles sont tangents

$Si\ \Delta<0$, il n'existe pas de solution. Les cercles ne sont ni tangents, ni sécants

$$\Rightarrow(x_1;x_2)=(|\alpha_1-e_{x;1}|-e_{x;2};|\alpha_2-e_{x;1}|-e_{x;2})\Rightarrow(y_1;y_2)=f(x_1;x_2)=(|f(X_1)-e_{y;1}|-e_{y;2};|f(X_1)-e_{y;1}|-e_{y;2})$$

- Limites de polynômes trigonométriques :

$$\lim_{x\to 0} \sin(x)=\sin(0)=0 \; ; \; \lim_{x\to 0} \cos(x)=\cos(0)=1$$

- Limite de $\underset{\alpha\to 0}{Lim} \dfrac{\sin(\alpha)}{\alpha}=1$

$$\text{Aire du triangle } OC_1S_1 < \text{Aire du secteur } OAE < \text{Aire du triangle } OAT$$

$$A_{OC_1S_1} < A_{\widehat{OM_0M_1}} < A_{OM_0S_T} \Leftrightarrow \frac{OC_1\times C_1M_1}{2} < \frac{\alpha\, r^2}{2} < \frac{OM_0\times M_0T}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos(\alpha)\times\sin(\alpha)}{2} < \frac{\alpha\,(1)^2}{2} < \frac{R\times\tan(\alpha)}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{\sin(\alpha)}\times\frac{\cos(\alpha)\times\sin(\alpha)}{2} < \frac{2}{\sin(\alpha)}\times\frac{\alpha}{2} < \frac{2}{\sin(\alpha)}\left(\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha) < \frac{\alpha}{\sin(\alpha)} < \frac{1}{\sin(\alpha)}\times\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \underset{\alpha\to 0}{Lim}\ \cos(\alpha) < \underset{\alpha\to 0}{Lim}\ \frac{\alpha}{\sin(\alpha)} < \underset{\alpha\to 0}{Lim}\ \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow 1 < \underset{\alpha\to 0}{Lim}\ \frac{\alpha}{\sin(\alpha)} < 1 \Leftrightarrow \boxed{\underset{\alpha\to 0}{Lim}\ \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}=1} \quad \left(de\ \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c} \right)$$

- Limite de : $\underset{\Delta x\to 0}{Lim}\dfrac{[\cos(h)-1]}{h}=0$

$$\frac{[\cos(h)-1]}{h}=\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\frac{\cos(h)+1}{\cos(h)+1}\right)=\frac{[\cos(h)]^2-1}{h\cos(h)+1}=\left(-\frac{[\sin(h)]^2}{h\cos(h)+1}\right)=-\frac{\sin^2(h)}{h\cos(h)+1}=-\frac{\sin(h)}{h}\frac{\sin(h)}{\cos(h)+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\left(\left(-\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\frac{\sin(\Delta x)}{\cos(\Delta x)+1}\right)\right)=\left(-1.\frac{0}{2}\right)=0$$

- Limite de : $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\tan(h)}{h}$

$$\frac{\tan(h)}{h}=\frac{1}{h}\frac{\sin(h)}{\cos(h)}=\left(\frac{1}{\cos(h)}\bullet\frac{\sin(h)}{h}\right)=\left(\frac{1}{\cos(h)}\bullet\frac{\sin(h)}{h}\right)$$

$$\Leftrightarrow \underset{\Delta x\to 0}{Lim}\left(\frac{1}{\cos(\Delta x)}\bullet\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\right)=\left(\frac{1}{1}.1\right)=1$$

Dérivation :

$$f(x)=\sin(x)$$

$$\begin{cases} Sin(a+b)=\sin(a).\cos(b)+\cos(a).\sin(b) \\ Sin(a-b)=\sin(a).\cos(b)-\cos(a).\sin(b) \end{cases} avec \begin{cases} (a+b)=x+\Delta x \\ (a-b)=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=2x+\Delta x \\ 2b=\Delta x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=x+\dfrac{\Delta x}{2} \\ b=\dfrac{\Delta x}{2} \end{cases}$$

$$\sin(p)-\sin(q)=\sin(a+b)-\sin(a-b) \quad = \quad + \quad 2\cos(a).\sin(b)=2\cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$$

$$f'(x)=\underset{\Delta x\to 0}{Lim}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin(x)}{\Delta x}=\underset{\Delta x\to 0}{Lim}\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}=\underset{\Delta x\to 0}{Lim}\quad\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\times\underset{\Delta x\to 0}{Lim}\left(\frac{\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\sin(x)\Leftrightarrow f'(x)=\left(\cos(x)\right)\times\left(1\right)\Leftrightarrow f'(x)=\cos(x)\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=\cos(x)\Leftrightarrow dy=\cos(x)\,dx$$

$$f(x)=\sin(x)$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\left[\sin(x+h)\right]-\sin(x)}{h}\Leftrightarrow\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\left[\sin(x)\cos(h)+\sin(h)\cos(x)\right]-\sin(x)}{h}$$

$$\Leftrightarrow\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\left[\sin(x)\cos(h)-\sin(x)\right]+\sin(h)\cos(x)}{h}=\left(\frac{\left[\cos(h)-1\right]}{h}\right)\sin(x)\cos(h)+\frac{\sin(h)}{h}\cos(x)$$

$$\Leftrightarrow\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{h}=\left(\frac{\left[\cos(h)\right]^2-1}{h\cos(h)+1}\right)\sin(x)\cos(\Delta x)+\frac{\sin(h)}{h}\cos(x)$$

$$\Leftrightarrow\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\left(\left(-\frac{\left[\sin(h)\right]^2}{h\cos(h)+1}\right)\right)\sin(x)\cos(\Delta x)+\frac{\sin(h)}{h}\cos(x)$$

$$\Leftrightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\left(-\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\frac{\sin(\Delta x)}{\cos(\Delta x)+1}\right)\right)\left(\sin(x)\cos(\Delta x)\right)+\left(\frac{\sin(h)}{\Delta x}\cos(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\left(-1.\frac{0}{2}\right)\sin(x)(1)+(1)\cos(x)\Leftrightarrow f'(x)=\cos(x)$$

$$f(x)=\cos(x)$$

$$Ors\,de: \begin{cases} \cos(a+b)=\cos(a).\cos(b)-\sin(a).\sin(b) \\ \cos(a-b)=\cos(a).\cos(b)+\sin(a).\sin(b) \end{cases} avec \begin{cases} p=(a+b)=x+\Delta x \\ q=(a-b)=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=2x+\Delta x \\ 2b=\Delta x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=x+\dfrac{\Delta x}{2} \\ b=\dfrac{\Delta x}{2} \end{cases}$$

$$\cos(p)-\cos(q)=\cos(a+b)-\cos(a-b)\quad=\quad-\quad 2\sin(a).\sin(b)\qquad=-2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}\Leftrightarrow f'(x)=\underset{\Delta x\to 0}{Lim}\frac{\frac{1}{2}\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\frac{1}{2}\Delta x}=\underset{\Delta x\to 0}{Lim}\frac{-\left(\frac{1}{2}\right)2\sin(x+\frac{\Delta x}{2}).\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\underset{\Delta x\to 0}{Lim}\quad\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x}=\underset{\Delta x\to 0}{Lim}\quad\frac{-\sin(x+\frac{\Delta x}{2}).\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin(x)\times 1=-\sin(x)$$

$$f(x)=\cos(x)\Leftrightarrow f'(x)=-\sin(x)\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=-\sin(x)\Leftrightarrow dy=-\sin(x)dx$$

$$f(x)=\tan(x)$$

$$\begin{cases} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{\tan(x+h)-\tan(x)}{h}=\dfrac{1}{h}\left[\tan(x+h)-\tan(x)\right] \\ \tan(x+h)=\dfrac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)}=\dfrac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\cos(h)}{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)}=\dfrac{\tan(x)+\tan(h)}{1-\tan(x)\tan(h)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{h}\left(\frac{\tan(x)+\tan(h)}{1-\tan(x)\tan(h)}-\tan(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{h}\,\frac{\cancel{\tan(x)}+\tan(h)-\cancel{\tan(x)}+\tan^2(x)\tan(h)]}{[1-\tan(x)\tan(h)]}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\tan(h)}{h}\left(\frac{[1+\tan^2(x)]}{1-\tan(x)\tan(h)}\right)=\left(\frac{1}{\cos(h)}\bullet\frac{\sin(h)}{h}\right)\left(\frac{[1+\tan^2(x)]}{[1-\tan(x)\tan(h)]}\right)$$

$$\Leftrightarrow \underset{\Delta x\to 0}{Lim}\frac{f(x+\Delta x)-f(\Delta x)}{\Delta x}=\underset{\Delta x\to 0}{Lim}\left(\frac{\tan(\Delta x)}{\Delta x}\right)\left(\frac{[1+\tan^2(x)]}{[1-\tan(x)\dfrac{\sin(\Delta x)}{\cos(\Delta x)}]}\right)\quad avec\ \underset{\Delta x\to 0}{Lim}\,\Delta x=h$$

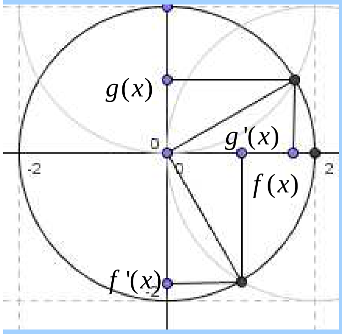
$$\Leftrightarrow f'(x)=\left(\frac{1}{1}\bullet 1\right)\left(\frac{[1+\tan^2(x)]}{1-\tan(x)\dfrac{0}{1}}\right)=1\left(\frac{1+\tan^2(x)}{1-\tan(x)(0)}\right)=\frac{1+\tan^2(x)}{1-0}=1+\tan^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x)=1+\tan^2(x) \\ \begin{cases} \sin^2(x)+\cos^2(x)=1 \\ \tan^2(x)=\dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \end{cases} \end{cases} \Bigg| \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x)=1+\dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ 1+\dfrac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)}=1+\left(\dfrac{1}{\cos^2(x)}-\dfrac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)}\right)=1+\left(\dfrac{1}{\cos^2(x)}-1\right) \end{cases}$$

$$\boxed{f=\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\frac{U}{V};\begin{cases} U'=\sin'(x)=\cos(x) \\ V'=\cos'(x)=-\sin(x) \end{cases}\Rightarrow f'(x)=\frac{U'V-UV'}{V^2}=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{[\cos(x)]^2}}\Leftrightarrow\boxed{\begin{cases} f'(x)=1+\tan^2(x) \\ f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)} \end{cases}}$$

Remarque :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ U=\sin(x)\Rightarrow U'=\cos(x) \\ V=\cos(x)\Rightarrow V'=-\sin(x) \end{cases}\Rightarrow f'(x)=\frac{U'V-UV'}{V^2}=\frac{-\cos(x)\sin(x)+\cos(x)\sin(x)}{\cos^2(x)}$$



$$f(x)=\sin(x)\Rightarrow f'(x)=\cos(x)$$

$$f(x)=\cos(x)=V\Rightarrow f'(x)=-\sin(x)=V'$$

$$f(x)=\tan(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$$

- Dérivation des fonctions composées trigonométriques

  - Dérivation de $f(x)=\sin(ax+b)$

$$f(x)=\sin(ax+b)\Rightarrow f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(a(x+\Delta x)+b)-\sin(ax+b)}{\Delta x}$$

$$\begin{cases}Sin(a+b)=\sin(a).\cos(b)+\cos(a).\sin(b)\\ Sin(a-b)=\sin(a).\cos(b)-\cos(a).\sin(b)\end{cases} avec\begin{cases}(a+b)=ax+b\\ (a-b)=ax+a\Delta x+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a=2ax+a\Delta x\\ 2b=a\Delta x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=ax+b+\dfrac{a\Delta x}{2}\\ b=\dfrac{a\Delta x}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\frac{1}{2}a\right)\sin(x+\Delta x)-\sin(x)}{\frac{1}{2}a\Delta x}=\frac{\left(\left(\frac{1}{2}\right)(a)\right)\left(2\cos(ax+\frac{a\Delta x}{2}+b).\sin(a\frac{\Delta x}{2}\right)}{a\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\quad a\left(\cos(ax+\frac{a\Delta x}{2}+b)\times\frac{\sin(a\frac{\Delta x}{2})}{a\frac{\Delta x}{2}}\right)où\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(X)}{X}=1\right)$$

$$\Leftrightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin(x)}{\Delta x}=\left(a\cos(ax+b)\right)\times(1)$$

$$\Rightarrow f(x)=\sin(ax+b)\Leftrightarrow f'(x)=a\cos(ax+b)\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=a\cos(ax+b)$$

  - Dérivation de $f(x)=\sin(ax+b)$

$$f(x)=\cos(x)\Rightarrow f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$Soit\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(ax+b)+\Delta x)-\cos(ax+b)}{\Delta x}$$

$$\begin{cases}Sin(a+b)=\sin(a).\cos(b)-\cos(a).\sin(b)\\ Sin(a-b)=\sin(a).\cos(b)+\cos(a).\sin(b)\end{cases} avec\begin{cases}(a+b)=ax+a\Delta x+b\\ (a-b)=ax+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a=2ax+a\Delta x+b\\ 2b=a\Delta x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=ax+b+\dfrac{a\Delta x}{2}\\ b=\dfrac{a\Delta x}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{2}a.\cos(a(x+\Delta x)+b)-\cos(ax+b)}{\frac{1}{2}a\Delta x}=\frac{-\frac{1}{2}a^2\sin(ax+\frac{a\Delta x}{2}+b).\sin(a.\frac{\Delta x}{2})}{\frac{1}{2}a\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(ax\Delta x+b+\Delta x)-\cos(ax+b)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}a^2\sin(ax+\frac{a\Delta x}{2}+b)\frac{\sin(a.\frac{\Delta x}{2})}{\frac{1}{2}a\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(a(x+\Delta x)+b)-\cos(ax+b)}{\Delta x}=a.\sin(ax+b)=U'\sin(U)\ où\ U=ax+b\Rightarrow U'=a$$

$$\Rightarrow f(x)=\cos(ax+b)\Leftrightarrow f'(x)=-a\sin(ax+b)\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=-a\sin(ax+b)\Leftrightarrow dy=-\sin(ax+b)adx=-\sin(U)dU$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\tan((a(x+h)+b)-\tan(ax+b)}{h}=\frac{\tan((ax+b+ah)-\tan(ax+b)}{h}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\dfrac{\sin((ax+b)+ah)}{\cos((ax+b)+ah)}-\tan(ax+b)}{h}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{h}\left(\frac{\dfrac{\sin(ax+b)\cos(ah)+\cos(ax+b)\sin(ah)}{\cos(ax+b)\cos(ah)}}{\dfrac{\cos(ax+b)\cos(ah)-\sin(ax+b)\sin(ah)}{\cos(ax+b)\cos(ah)}}-\tan(ax+b)\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{h}\left(\frac{\tan(ax+b)+\tan(ah)}{1-\tan(ax+b)\tan(ah)}-\tan(ax+b)\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{h}\left(\frac{\tan(ax+b)+\tan(ah)-\tan(ax+b)+\tan^2(ax+b)\tan(ah)]}{1-\tan(ax+b)\tan(ah)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{h}\left(\frac{[\tan(ah)[1+\tan^2(ax+b)]}{1-\tan(ax+b)\tan(ah)}\right)=\frac{a}{ah}\tan(ah)\left(\frac{1+\tan^2(ax+b)}{1-\tan(ax+b)\tan(ah)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\left(\frac{a}{a}\frac{1}{h}\frac{\sin(ah)}{\cos(ah)}\right)\left(\frac{1+\tan^2(ax+b)}{1-\tan(ax+b)\tan(ah)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{a}{\cos(a.\Delta x)}\frac{\sin(a\Delta x)}{a.\Delta x}\right)\left(\frac{1+\tan^2(ax+b)}{1-\tan(ax+b)\dfrac{\sin(a.\Delta x)}{\cos(a.\Delta x)}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\left(\frac{a}{1}\times 1\right)\left(\frac{1+\tan^2(ax+b)}{1-\tan(ax+b)\dfrac{0}{1}}\right)$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=a(1+\tan^2(ax+b))\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=a+a\tan^2(ax+b)\Leftrightarrow dy=[a+a\tan^2(ax+b)]dx$$

$$\Leftrightarrow dy=adx(1+\tan^2(ax+b))\Leftrightarrow dy=dU[1+\tan^2(U)]$$

$$\begin{cases} f(x)=\sin(x)\Leftrightarrow f'(x)=\cos(x)\\ f(x)=\cos(ax+b)=V\Leftrightarrow f'(x)=-\sin(x)\\ f(x)=\tan(ax+b)\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}\end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x)=\sin(ax+b)=U\Leftrightarrow f'(x)=a\cos(ax+b)=U'\\ f(x)=\cos(ax+b)=V\Leftrightarrow f'(x)=-\sin(ax+b)=V'\\ f(x)=\tan(ax+b)\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{\cos^2(X)+\sin^2(X)}{\cos^2(X)}=1+\tan^2(ax+b)=\dfrac{1}{\cos^2(ax+b)}\end{cases}$$

Intégration – Calcul d'aire :

L'intégrale n'est que l'opération réciproque de la dérivation à une constante arbitraire près :

$$\text{fonction initiale} = \text{fonction primitive } F(x)+\text{C} \underset{\text{Intégration}}{\overset{\text{dérivation}}{\rightleftarrows}} \text{fonction dérivée}$$

Où C est une constante arbitraire inconnue que l'on peut déterminer que si la fonction est bornée par un intervallle $I=[a;b]$

$$\begin{cases} f_1(x)=\sum_{k=n}^{k=1} a_k x^k + c_1 \Rightarrow f_1'(x)=\sum_{k=n}^{k=1} a_k x^k \\ f_2(x)=\sum_{k=n}^{k=1} a_k x^k + c_2 \Rightarrow f_2'(x)=\sum_{k=n}^{k=1} a_k x^k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_2(x)-f_1(x)=c_2-c_1=C \\ f_2'(x)-f_1'(x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \int [f_2'(x)-f_1'(x)]dx=[f_2(x)-f_1(x)]+C$$

a) intégrale indéfinie :

$$\begin{cases} I(x)=-\int \cos(x)\,dx=\sin(x)+C \Rightarrow \int \cos(x)=-\sin(x)+C \\ I(x)=\int \sin(x)\ dx=\cos(x)+C \Rightarrow \int \cos(x)=\sin(x)+C \\ I(x)=\int 1+\tan^2(x)\ dx=\cos(x)+C \Rightarrow -\int \tan(x)=-\sin(x)+C \end{cases}$$

$$\begin{cases} I(x)=-\int a\cos(ax+b)\,dx=\sin(ax+b)+C \Rightarrow \int \cos(ax+b)=-\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C \\ I(x)=\int a\sin(ax+b)\,dx=\cos(ax+b)+C \Rightarrow \int \cos(ax+b)=\frac{1}{a}\sin(ax)+C \\ I(x)=\int [1+\tan^2(ax+b)]\ dx=\tan(ax+b) \end{cases}$$

b) Intégrale définie

$$\int_b^a f'(x)dx=[f(x)]_b^a=f(b)-f(a) \Leftrightarrow \int_b^a g(x)dx=[G(x)]_b^a=G(b)-G(a)$$

$$\textit{Exemple}: \int_b^a \cos(x)\,dx=[F(x)]_b^a=-[\sin(x)]_b^a-[\sin(b)-\sin(a)]$$

Relation de chasles :

$$\int_b^a f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=F(b)-F(a)+F(c)-F(b)=F(c)-F(a)=\int_c^a f(x)dx$$

Multiplition scalaire :

$$\begin{cases} a\int f'(x)dx=a\ f(x) \\ \int a\ f'(x)dx=af(x) \end{cases} \Leftrightarrow a\int f'(x)dx=\int a\ f'(x)dx$$

c) Aire du cercle :

- Révision : Arithmétique

Addtion :

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Soustraction :

–	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0									
2	-1	0								
3	-2	-1	0							
4	-3	-2	-1	0						
5	-4	-3	-2	-1	0					
6	-5	-4	-3	-2	-1	0				
7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0			
8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0		
9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	
10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0

Multiplication

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Division

÷	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0,5	1								
3	0,33333	0,66667	1							
4	0,25	0,5	0,75	1						
5	0,2	0,4	0,6	0,8	1					
6	0,16667	0,33333	0,5	0,66667	0,83333	1				
7	0,14286	0,28571	0,42857	0,57143	0,71429	0,85714	1			
8	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1		
9	0,11111	0,22222	0,33333	0,44444	0,55556	0,66667	0,77778	0,88889	1	
10	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1

Puissance

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
4	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	1048576

0	1	2	3							
0	1	1,41421356	1,73205081							
4	5	6	7	8						
2	2,23606798	2,44948974	2,64575131	2,82842712						
9	10	11	12	13	14	15				
3	3,16227766	3,31662479	3,46410162	3,60555128	3,74165739	3,87298335				
16	17	18	19	20	21	22	23	24		
4	4,12310563	4,24264069	4,35889894	4,47213595	4,58257569	4,69041576	4,79583152	4,89897949		
25	26	27	28	29	30					
5	5,09901951	5,19615242	5,29150262	5,38516481	5,47722558					
	31	32	33	34	35					
	5,56776436	5,65685425	5,74456265	5,83095189	5,91607978					
36	37	38	39	40	41	42				
6	6,08276253	6,164414	6,244998	6,32455532	6,40312424	6,4807407				
	43	44	45	46	47	48				
	6,55743852	6,63324958	6,70820393	6,78232998	6,8556546	6,92820323				
49	50	51	52	53	54	55	56	57		
7	7,07106781	7,14142843	7,21110255	7,28010989	7,34846923	7,41619849	7,48331477	7,54983444		
	58	59	60	61	62	63				
	7,61577311	7,68114575	7,74596669	7,81024968	7,87400787	7,93725393				
64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	
8	8,06225775	8,1240384	8,18535277	8,24621125	8,30662386	8,36660027	8,42614977	8,48528137	8,54400375	
	74	75	76	77	78	79	80			
	8,60232527	8,66025404	8,71779789	8,77496439	8,83176087	8,88819442	8,94427191			
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91
9	9,05538514	9,11043358	9,16515139	9,21954446	9,2736185	9,32737905	9,38083152	9,43398113	9,48683298	9,53939201
	92	93	94	95	96	97	98	99		
	9,59166305	9,64365076	9,69535971	9,74679434	9,79795897	9,8488578	9,89949494	9,94987437		

$$\sqrt{3} = 1,713050 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,856525 \qquad \sqrt{6} = 2,449489 \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{2} = 1,224\,744$$

$$\sqrt{2} = 1,414213 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,707106 \qquad \sqrt{5} = 2,236067 \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{2} = 1,118\,033$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = 0,106\,711$$

	1	2	3	5	7	9
10	11		13		17	19
20			23			29
30	31				37	
40	41		43		47	
50			53			
60	61		73			79
70	71					
80			83			89
90					97	

	1	2	3	5	7	9
100	101		103		107	109
110			113			
120					127	
130	131				137	139
140						149
150	151				157	
160			163		167	
170			173			179
180	181					
190	191		193			

- Algèbre

Equation du premier degré :

Droite colinéaire (droites parallèles ou droites confondues)

Si deux vecteurs sont colinéaires alors par extension leurs droites sont parallèle d'équation tel que :

$$\begin{cases} D_1(x)=0 \\ D_2(x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{10}x+x_{20}y-c_{30}=0 \\ x_{11}x+x_{21}y-c_{31}=0 \end{cases} \Leftrightarrow Det\begin{pmatrix} x_{10} & x_{20} \\ x_{11} & x_{21} \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_{10} & x_{20} \\ x_{11} & x_{21} \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow x_{10}x_{21}-x_{11}x_{20}=0$$

De même que par restriction leur vecteur sont colinéaire si et seulement si :

$$\begin{cases} \vec{v_1}=x_{10}\vec{i}+x_{20}\vec{j}=0 \\ \vec{v_2}=x_{11}\vec{i}+x_{21}\vec{j}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_{10} & x_{20} \\ x_{11} & x_{21} \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow x_{10}x_{21}-x_{11}x_{20}=0$$

Droite orthogonales : Si deux vecteurs sont orthogonales alors par extension leurs droites sont orthogonale d'équation tel que :

$$\begin{cases} D_1(x)=0 \\ D_2(x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{10}x+x_{20}y-c_{30}=0 \\ x_{11}x+x_{21}y-c_{31}=0 \end{cases} \Leftrightarrow Det\begin{pmatrix} x_{10} & x_{20} \\ -x_{11} & x_{21} \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_{10} & x_{20} \\ -x_{11} & x_{21} \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow x_{10}x_{21}+x_{11}x_{20}=0$$

Et par restrictions leurs vecteurs sont orthogonaux d'après le produit scalaire, si et seulement si le déterminant que nous aurions pu appelé déterminant scalaire:

$$\begin{cases} \vec{v_1}=x_{10}\vec{i}+x_{20}\vec{j}=0 \\ \vec{v_2}=x_{11}\vec{i}+x_{21}\vec{j}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_{10} & x_{20} \\ -x_{11} & x_{21} \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow x_{10}x_{21}+x_{11}x_{20}=0$$

Système d'équation (2;2) :

$$\begin{cases} E1 \\ E2 \end{cases} = \begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases} \\ \begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} aex+bey=ce \\ dbx+eby=fb \end{cases} \\ \begin{cases} adx+bdy=cd \\ dax+eay=fa \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (ae-db)x+(be-eb)y=ce-fb \\ (ad-da)x+(bd-ea)y=cd-fa \end{cases}$$

$$\begin{cases} E1 \\ E2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ae-db & be-eb \\ ad-da & bd-ea \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ce-fb \\ cd-fa \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{ce-fb}{ae-db} \\ \dfrac{cd-fa}{db-ae} \end{pmatrix}$$

Système d'équation 3.2 : Intersection de droites

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \\ a_3x+b_3y=c_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \\ \begin{cases} a_2x+b_2y=c_2 \\ a_3x+b_3y=c_3 \end{cases} \\ \begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_3x+b_3y=c_3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} (a_1b_2-a_2b_1)x+0y=c_1b_2-c_2a_1 \\ 0x+(b_2a_1-a_2b_1)y=c_2a_1-c_1a_2 \end{cases} \\ \begin{cases} (a_2b_3-a_3b_2)x+0y=c_1b_3-c_3b_1 \\ 0x+(b_3a_2-a_3b_2)y=c_3a_2-c_1a_3 \end{cases} \\ \begin{cases} (a_1b_3-a_3b_1)x+0y=c_1b_3-c_3b_1 \\ 0x+(b_3a_1-a_3b_1)y=c_3a_1-c_1a_3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=\dfrac{(c_1b_2-c_2a_1)}{(a_1b_2-a_2b_1)} \\ y=\dfrac{(c_2a_1-c_1a_2)}{(b_2a_1-a_2b_1)} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{(c_1b_3-c_3b_1)}{(a_2b_3-a_3b_2)} \\ y=\dfrac{(c_3a_2-c_1a_3)}{(b_3a_2-a_3b_2)} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{(c_1b_3-c_3b_1)}{(a_1b_3-a_3b_1)} \\ y=\dfrac{(c_3a_1-c_1a_3)}{(b_3a_1-a_3b_1)} \end{cases} \end{cases}$$

Equation du second degré

• Racine de l'équation du second degré : $(ax+b)(cx+d)=ac\,x^2+(ad+bc)\,x+bd=Ax^2+Bx+C$

• <u>Forme canonique de l'équation du second degré</u>

$$Soit\ : ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$Ors\ \ x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\ \#\ (A+B)^2 \Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}= \ A^2+2AB+B^2+k \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A}^2=x^2 \\ 2\,\mathrm{AB}=\frac{b}{a}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{A}=x \\ \mathrm{B}=\frac{b}{2xa}x=\frac{b}{2a} \end{cases}$$

$$Soit: \left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+\frac{c}{a}=\left(x+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)-\left(\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(+\frac{c}{a}\right)\right) \Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)^2 \Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}= \quad A^2 \quad - \quad B^2 \ =(A-B)(A+B)$$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}= \left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}= \left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a^2}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\ ;\ d'où\ :$$

• <u>Solution de l'équation du second degré:</u>

$Si\ \Delta>0$

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x_2=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{cases}$$

$Sinon\ si\ \Delta=0,\ alors$:

$$x_1=x_2\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b-\sqrt{0}}{2a}=-\frac{b}{2a} \Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}$$

Sinon si $\Delta<0$, *alors il n'existe pas de solution dans l'ensemble des nombres réel* $\mathbb{R}$, *car* $\sqrt{\Delta}\geq 0$

d'où posons un nouvel ensemble appelé nombre complexe, noté $\mathbb{C}$ *tel que si* $\Delta<0$; *on pose* $\Delta_1=i^2\Delta'=i^2(-\Delta)$ *où* $i^2=-1$, *d'*

$$\begin{cases} x=\dfrac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}=-\dfrac{b}{2a}-\dfrac{i\sqrt{\Delta'}}{2a}=A-iB \\ x=\dfrac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}=-\dfrac{b}{2a}+\dfrac{i\sqrt{\Delta'}}{2a}=A+iB \end{cases}$$

• <u>Relation entre la somme Σ et Produit Π des racine de l'équation :</u>

$$ax^2+bx+c=a(x-r_1)(x-r_2) \Leftrightarrow \left(x^2-\sum_{i=1}^{i=2} r_i\,x+\prod_{i=1}^{i=2} r_i\right)$$

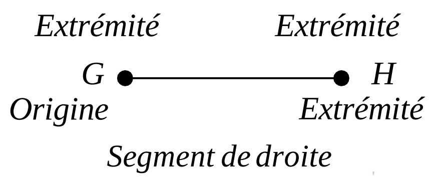
1) TRIGONOMETRIE GENERALE

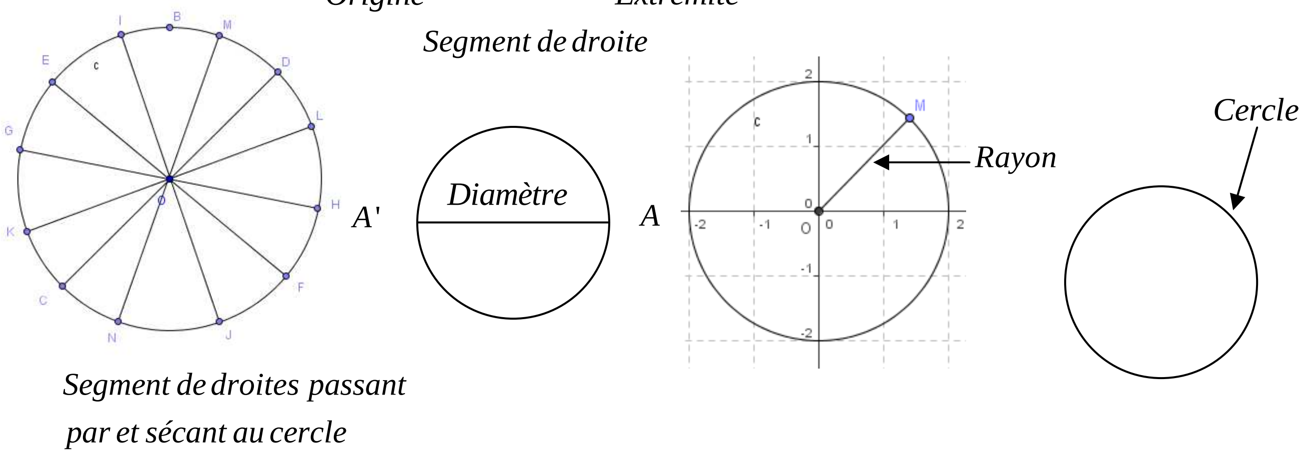
I **Préambule : Notion de géométrie euclidienne :**

1 Caractéristique d'un cercle

Un cercle est une figure géométrique curviligne fermée tel que chaque segment de droite inscrite dans le cercle (segment de droite comprise dans le cercle tel que leurs extrémité sont sécants au pourtour de la figure géométrique, soit au tracé noir circulaire), et passant par son centre, ont toutes la même distance. Les droites qui passent en leur centre sont appelés diamètre, et leurs demi droite tel que la première extrémité est le point d'origine O représentant le centre du cercle, ainsi que la seconde extrémité est sécant au cercle, est appelé rayon. Généralement le diamètre de référence est représenté par la droite horizontale.

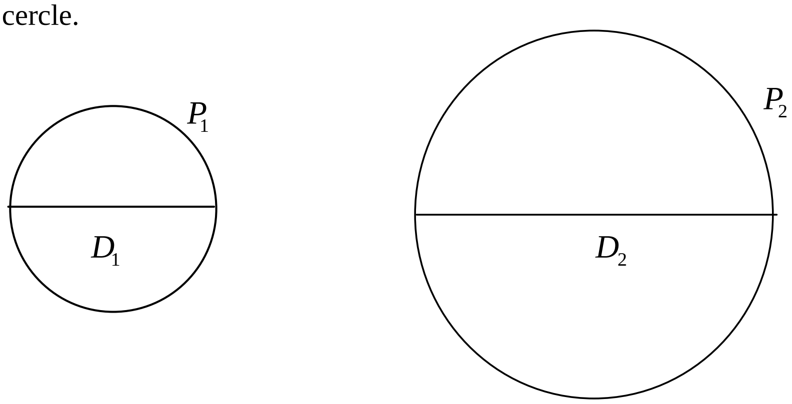
Soit dans les figure géométrique ci dessous : Diametre = D = A'A ; Rayon = r = OM ; Périmètre = cercle



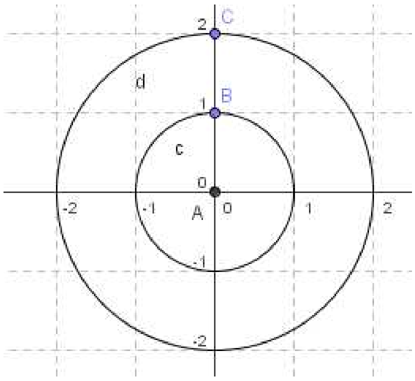


Le contour de la figure est le pourtour tracé en noir qui définit le cercle C. Ce contour comme la géométrie polygonal est appelé aussi périmètre.

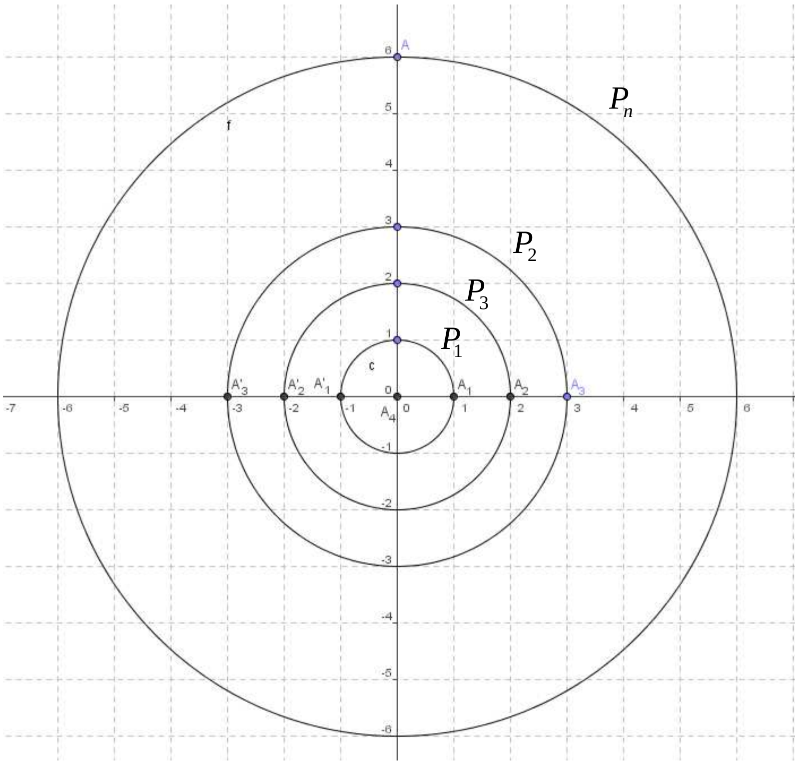
Il existe un rapport numérique qui est un nombre constant entre les diamètres de chaque cercle et le périmètre du cercle.



Comme on appelle un cercle inscrit dans un autre cercle ayant tous le même centre : cercle circonscrit



Il vient qu' en posant $D_1 = A'_1\,A_1, D_2 = A'_2\,A_2,\ D_3 = A'_3\,A_3 ....,\ D_n = A'_n\,A_n$

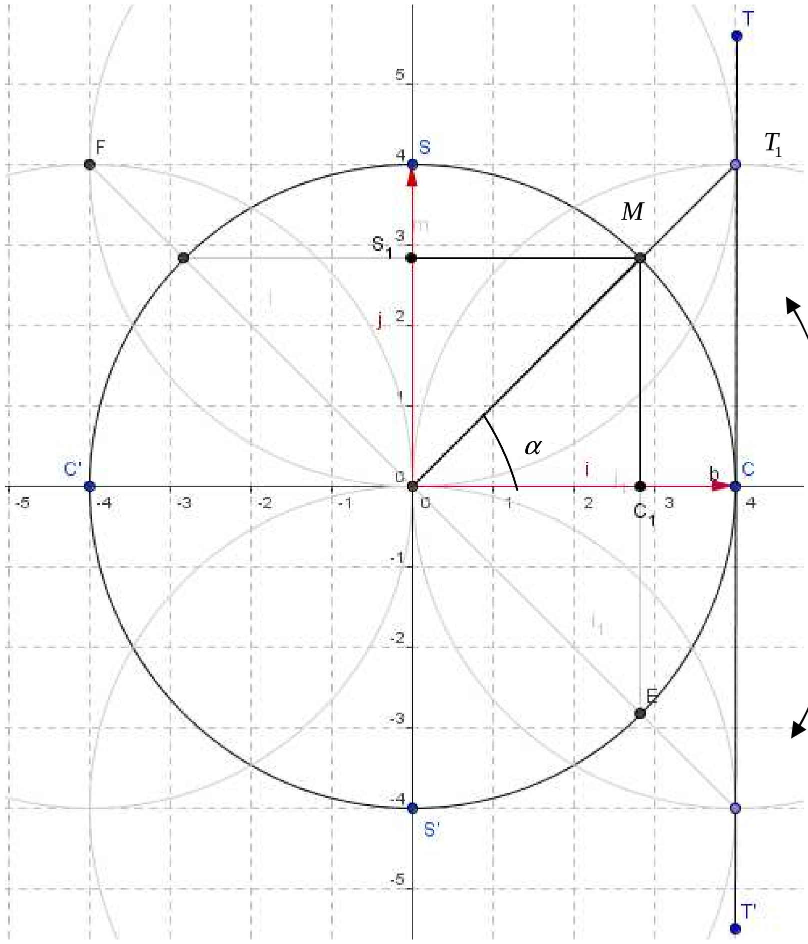


On a : $\frac{P_1}{D_1} = \frac{P_2}{D_2} = \frac{P_3}{D_3} = ... = \frac{P_n}{D_n} = \frac{P}{D} = \text{constante} = \pi = 3{,}141\ 592\ 653$

D'où le périmètre du cercle est de : $\begin{cases} \frac{P}{D} = \pi \\ D = 2r \end{cases} \Leftrightarrow P = 2\pi r$ où r est le rayon du cercle.

Le cercle trigonométrique :

Construction du cercle et des lignes trigonométriques (Développera plus en détail plus tard, j'ai laissé exprès en gris la construction des lignes trigonométriques qui représentent l'intersection des 4 cercle)



Description littéraire

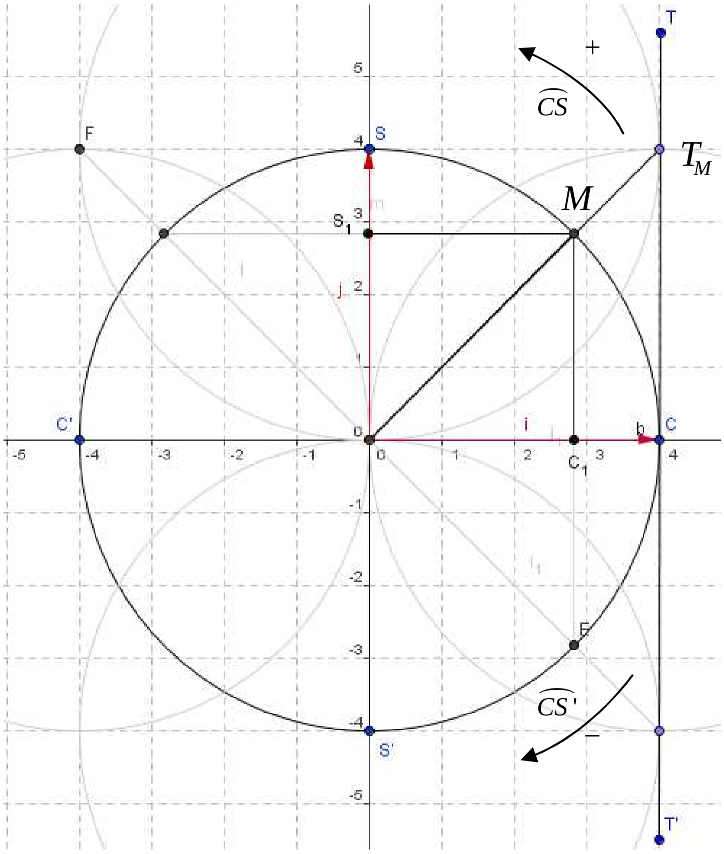
Rappelons que le pourtour du cercle est appelé Cercle, et représente aussi le périmètre du cercle

Le cercle trigonométrique est muni d'un sens de parcours et de mesures métriques et angulaires :

- Le cercle trigonométrique possède deux segments orthogonaux, l'un horizontale, l'autre verticale, dont les deux extrémités, ou l'origine et l'extrémité appartiennent au cercle C.
- l'intersection des deux segments représente le centre du cercle, noté O.
- Le segment CC' est appelé axe des cosinus muni d'un vecteur i de longueur de : une unité
- Le segment SS' est appelé axes des sinus muni d'un vecteur j de longueur de : une unité
- Le segment TT' tangent au cercle C en point C est l'axe de la tangente appelé tangente
- toutes les lignes "parallèle" au cercle y compris la lignes du cercle est appelé un arc, un arc de 380 ° représente un cercle, un arc de 180° représente un demi cercle.
- L'Arc $\widehat{CS}$ circulant de C à S (sens de parcours inverse d'une aiguille d'un montre est appelé sens de parcours positif ou direct, Soit à une direction circulaire directe ou positive
- L'arc $\widehat{CS'}$ circulant de C à S' (sens de parcours des aiguille d'une montre), Soit à une direction circulaire indirecte ou négative
- Les segment OC, OM, OS, OC', OS' représente le rayon qui dans le cercle a donc une longueur de 1 unité
- Le segment CC' représente le diamètre du cercle

- L'angle $\widehat{COM}$ représente l'arc α, noté $\widehat{CM}$, noté vectoriellement $\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM}}\right)$

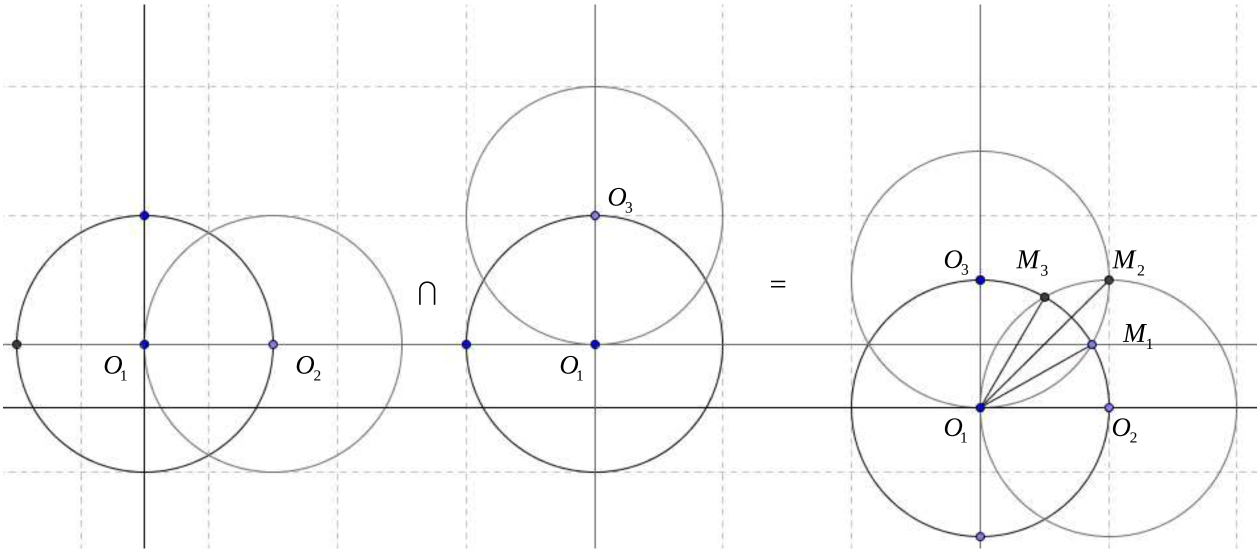
En résumé :



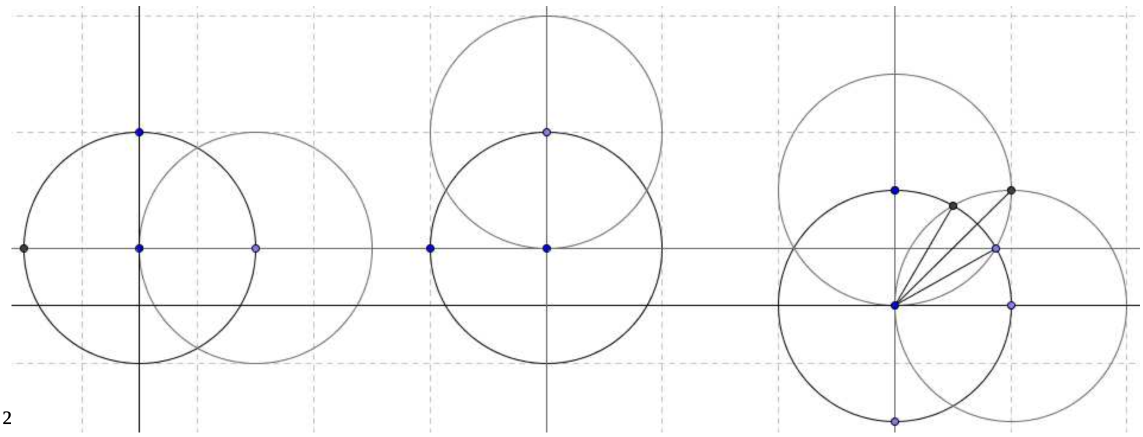
CC' axe des cosinus
SS' axe des sinus
TT' axe des Tangente
$\widehat{CS}$ sens direct ou sens indirect
$\widehat{CS'}$ sens négatif ou indirect
$\widehat{OM} = \alpha$
$OC_1 = \cos(\alpha)$
$OS_1 = Sin(\alpha)$
$C\,T_M = Tan(\alpha)$

Constructions des angles du cercle :

A l'aide d'un compas, on peut construire des intersections d'arc qui sont des portions de cercles de même diamètre pour obtenir des valeurs angulaire régulière (ou non pour autre utilité).



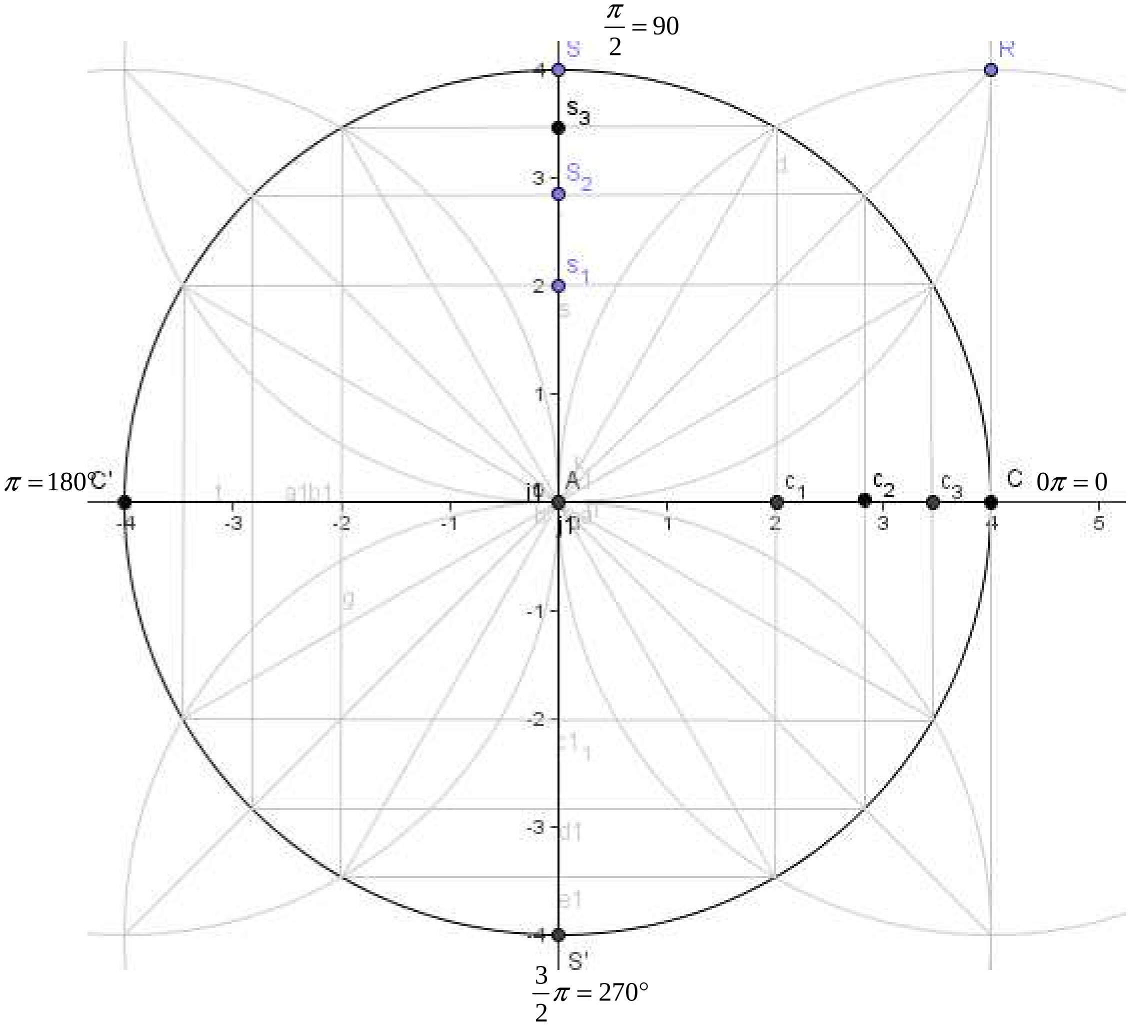
Il évident qu'au compas, après être habitué, on ne trace qu'une partie des cercles, soit deux arc



2

2) Valeurs angulaire sur le cercle

Le cercle muni d'un repère trigonométrique, soit de deux axes, compris entre [-1 ; 1], qui sont orthogonaux entre eux.
D'où le cercle est coupé en premier lieu en 4 quarts. Comme les axes sont orthogonaux entre eux, il vient que chacun des quarts de cercle forment 90 degré, soit en radian $\frac{\pi}{2}$.



Soit les expressions angulaires mathématiquement s'écrivent :

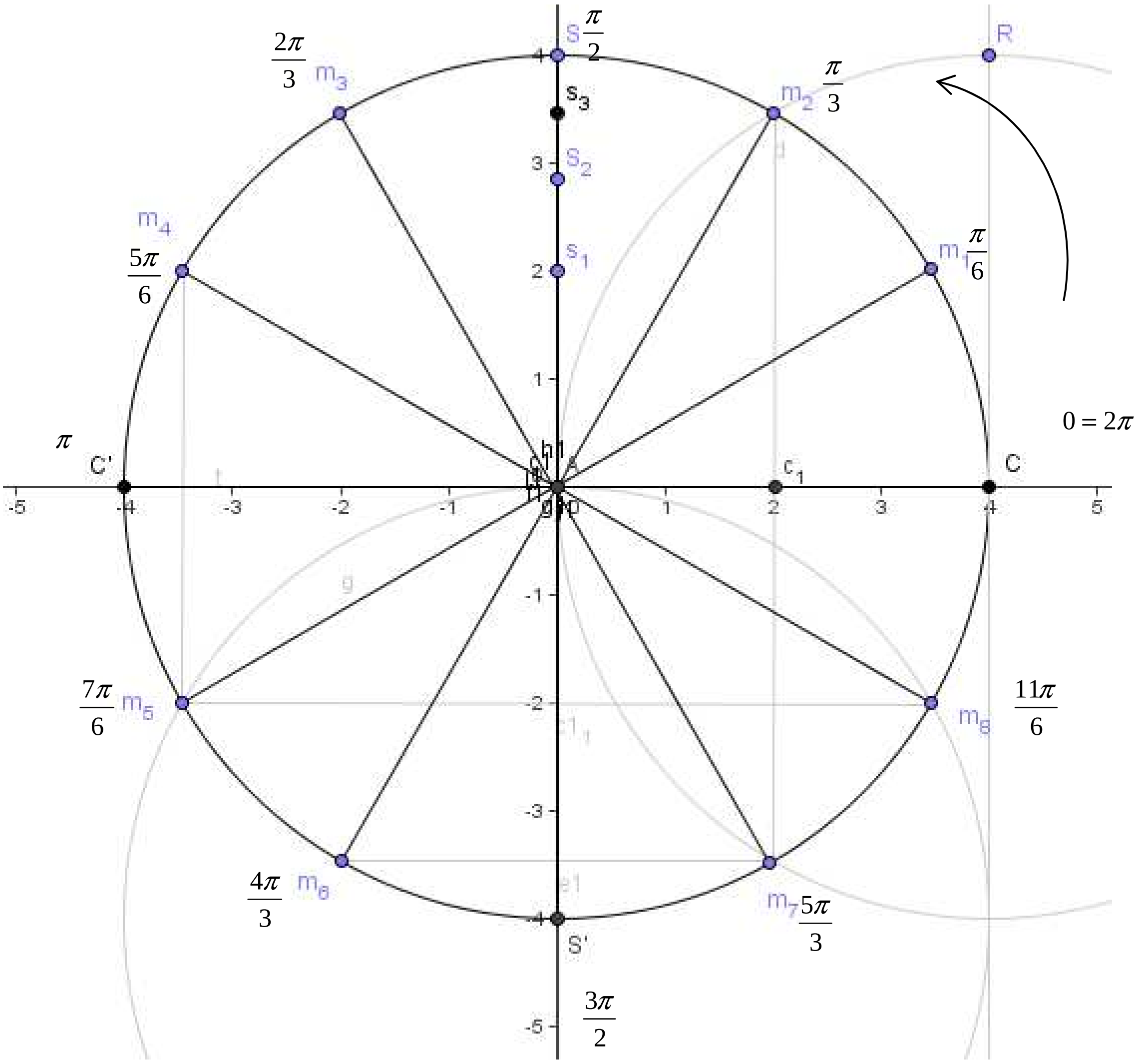
$$\begin{cases} \widehat{COS} = \widehat{CS} = \left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OS}\right) = \frac{\pi}{2} \\ \widehat{COC'} = \widehat{CC} = \left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC}\right) = \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OS}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}\right) \\ \left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}\right) = \left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OS'}\right) + \left(\overrightarrow{OS};\overrightarrow{OC'}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widehat{COS'} = \widehat{CS'} = \left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OS'}\right) = \left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OS}\right) + \left(\overrightarrow{OS};\overrightarrow{OC'}\right) + \left(\overrightarrow{OC'};\overrightarrow{OS'}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \\ \widehat{COC'} = \widehat{CC} = \left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC}\right) = \left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OS}\right) + \left(\overrightarrow{OS};\overrightarrow{OC'}\right) + \left(\overrightarrow{OC'};\overrightarrow{OS'}\right) + \left(\overrightarrow{OS'};\overrightarrow{OC'}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi \end{cases}$$

De meme qu'en divisant le cercle en 12 part égale, on obtient un cercle de :

$$\frac{360°}{12} = \frac{2\pi}{12} \Leftrightarrow 30° = \frac{\pi}{6}$$

Pour obtenir les valeur angulaire de 30 °, 60° , il suffit de faire un cercle ou arc de cercle a partir des points de centre C et S. leurs intersections avec le cercle représente $30° = \frac{\pi}{6}$



Par suite

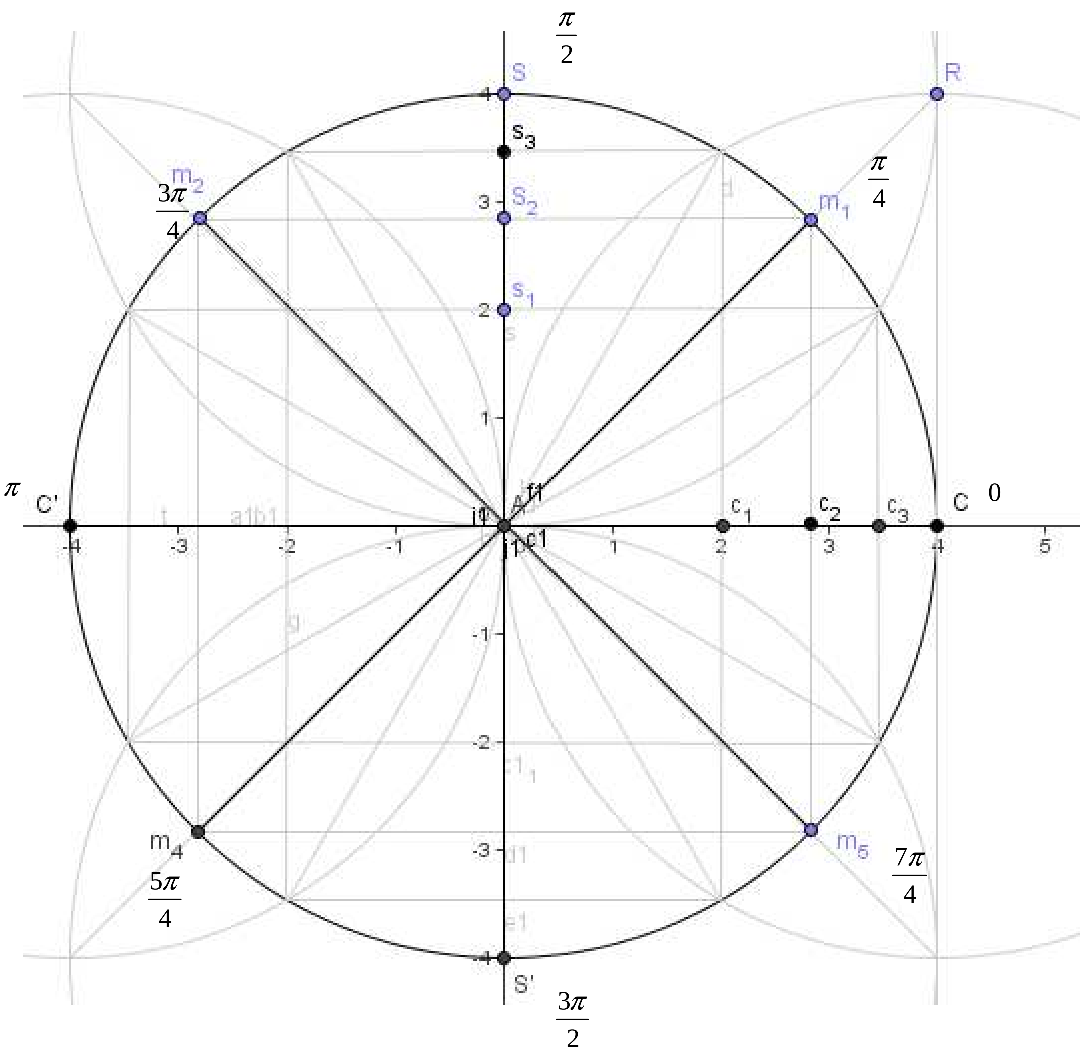
$$\widehat{CC} = \widehat{Cm_1} + \widehat{m_1m_2} + \widehat{m_2S} + \widehat{Sm_3} + \widehat{m_3m_4} + \widehat{m_4C'} + \widehat{C'm_5} + \widehat{m_5m_6} + \widehat{m_6S'} + \widehat{S'm_7} + \widehat{m_7m_8} + \widehat{m_8C}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{CC} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \widehat{CC} = \sum_{i=1}^{i=12}\left(\frac{1}{6}\pi_i\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\pi}{6};\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}\;;\;\frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2};\frac{4}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi;\frac{5}{6}\pi;\frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi;\frac{5}{6}\pi;\frac{6}{6}\pi = \pi;\frac{7\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi;\frac{8}{6}\pi = \frac{4}{3}\pi;\frac{9}{6}\pi = \frac{3}{2}\pi;\frac{10}{6}\pi = \frac{5}{3}\pi;\frac{11}{6}\pi;\frac{12}{6}\pi = 2\pi \\ \left\{\begin{array}{l} \boxed{\frac{\pi}{6}};\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \boxed{\frac{1}{3}\pi};\;\frac{1}{3}\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6}\pi = \boxed{\frac{1}{2}\pi}\;;\;\frac{1}{2}\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{3+1}{6} = \frac{4}{6}\pi = \boxed{\frac{2}{3}\pi};\frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{5}{6}\pi};\frac{5}{6}\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi}{6} = \pi \\ \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi;\frac{7}{6}\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{8}{6}\pi = \frac{4}{3}\pi;\frac{4}{3}\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{4.2+1}{6}\pi = \frac{9}{6}\pi;\frac{9}{6}\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{10}{6}\pi = \frac{5}{3}\pi;\frac{5}{3}\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{10+1}{6}\pi = \frac{11}{6}\pi;\frac{12}{6}\pi = \frac{\pi}{6} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

De même lorsque nous partageons le cercle en 8 part égales, nous obtenons un cercle divisé en 8 parties égales, soit une portion du cercle dont le cercle qui a une valeur angulaire de 360 degré, ou 2π, eux, ont une valeurs angulaires de $\frac{360}{8}=45°=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}...\frac{\pi}{4}radian=\frac{\pi}{4}$. Ors 45 ° dans un triangle représente la diagonale d'un carré ou d'un rectangle, d'où on pose les 8 portions sur les diagonales du cercle (Bon, en réalité c'est la bissectrice de deux angle et la médiatrice du triangle)



Il vient que :

$$\widehat{CC}=\widehat{Cm_1}+\widehat{m_1S}+\widehat{Sm_2}+\widehat{m_3C'}+\widehat{C'm_4}+\widehat{m_4S'}+\widehat{S'm_5}+\widehat{m_5C}$$

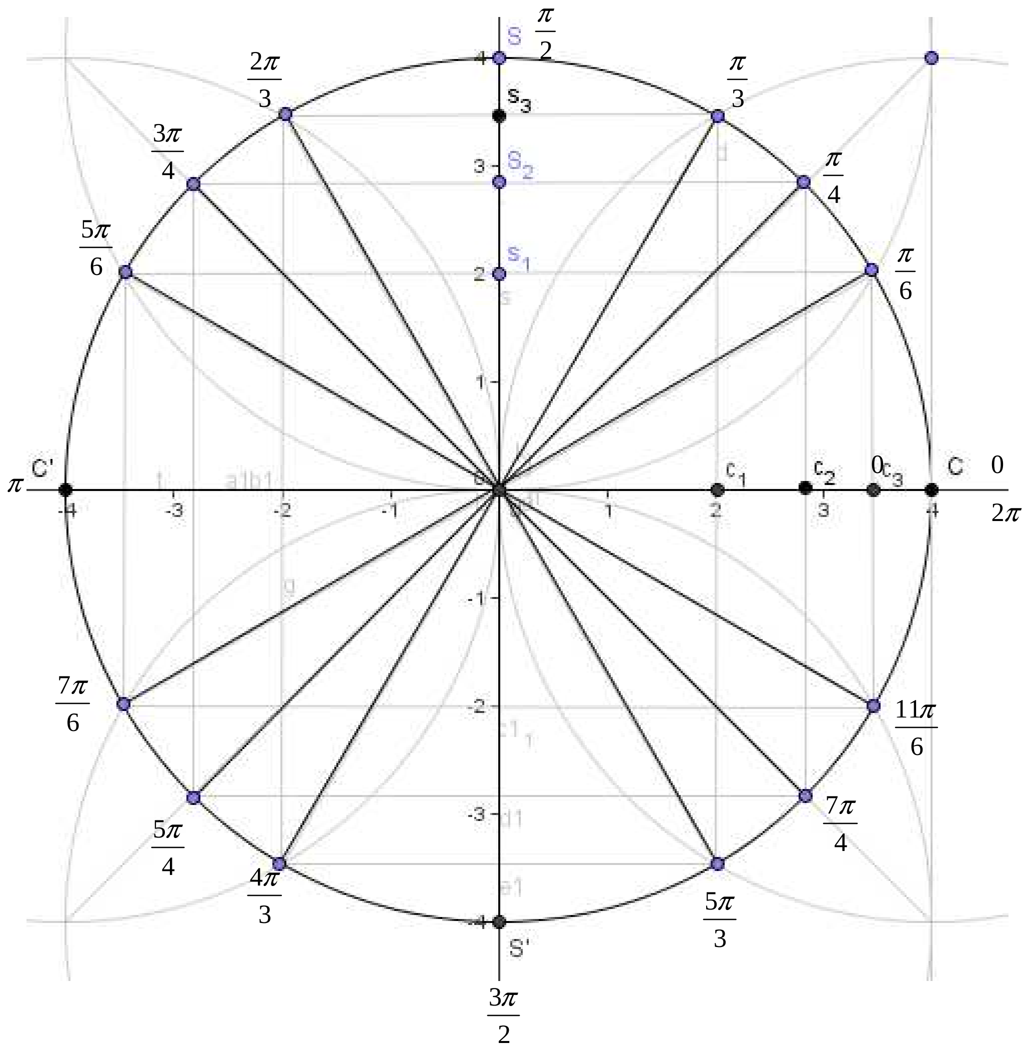
$$\Leftrightarrow \widehat{CC}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{CC}=\sum_{i=1}^{i=8}\left(\frac{1}{4}\pi_i\right)$$

$$\frac{\pi}{4};\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi;\frac{4}{4}\pi=\pi;\frac{5}{4}\pi;\frac{6}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi;\frac{7}{4}\pi=\frac{7}{4}\pi;\frac{8}{4}\pi=2\pi$$

$$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{2}{4}\pi=\frac{1}{2}\pi;\frac{1}{2}\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{2+1}{4}\pi=\frac{3}{4};\frac{3}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{4}{4}\pi=\pi;\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}\pi;$$

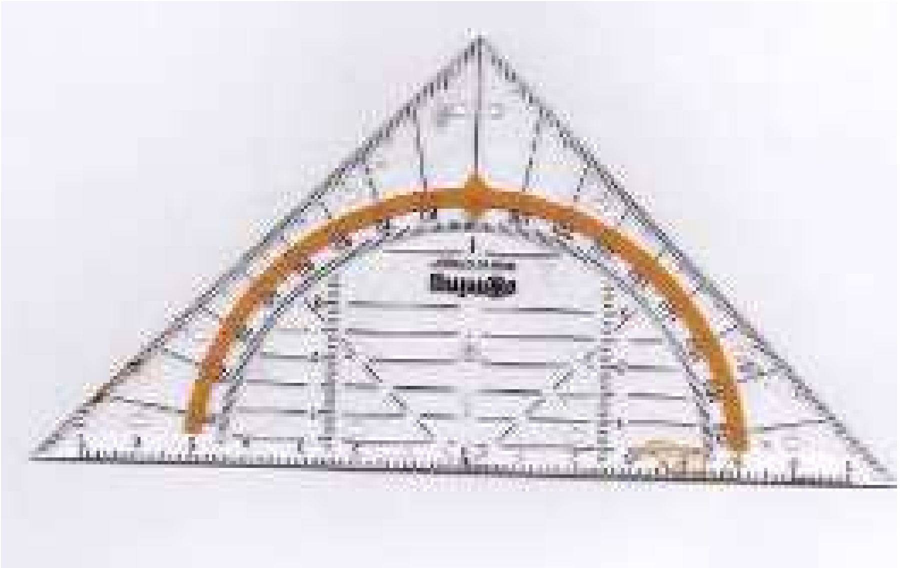
Les valeurs angulaires remarquables sur le cercle en récapitulatif sont donc :



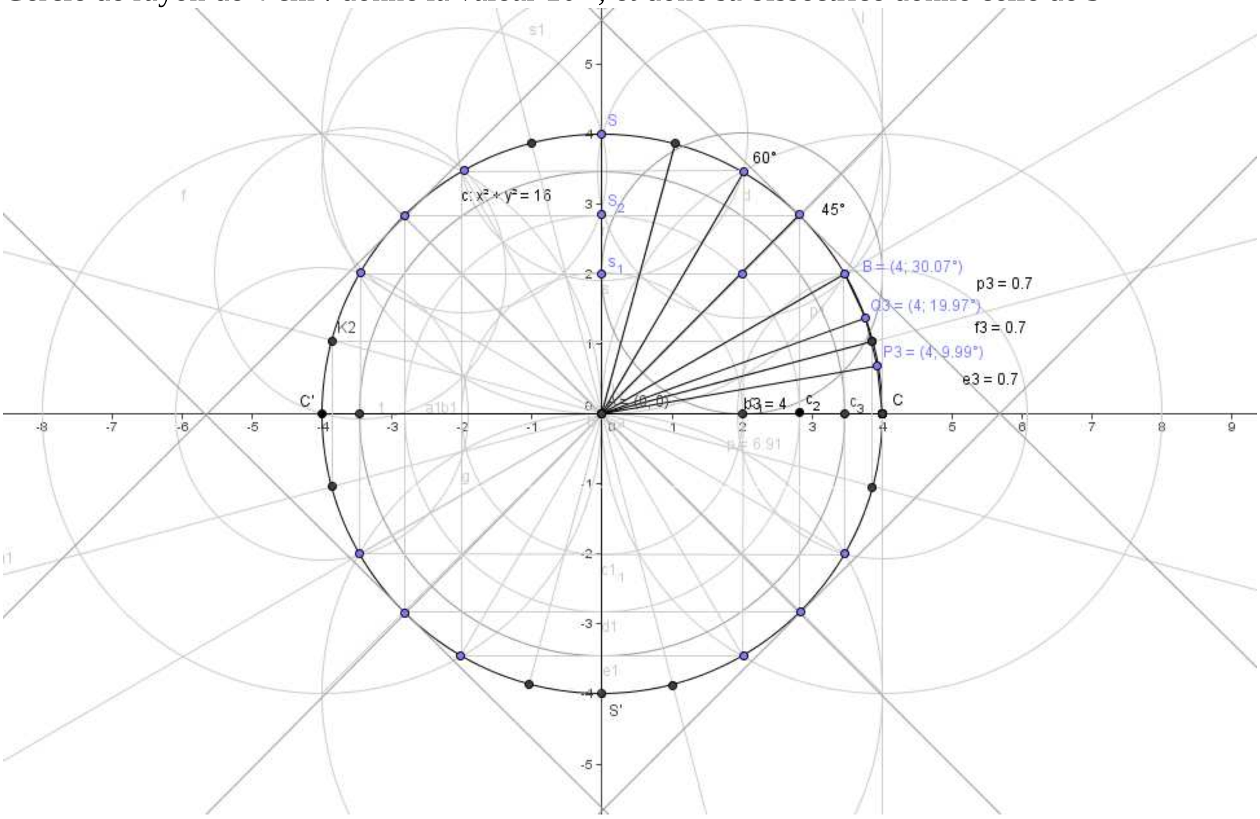
3) Valeur Angulaire Etalon (cercle de rayon de 4 cm)

Valeur étalon 10 degré

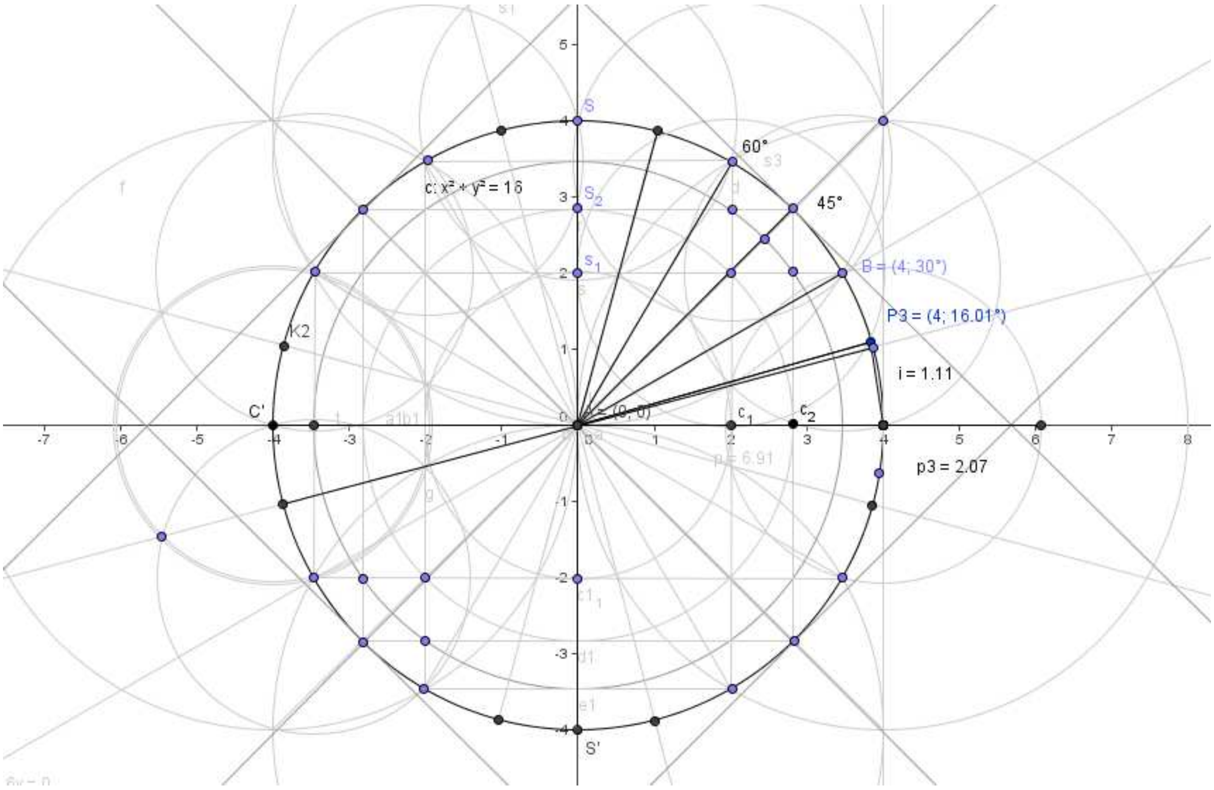
Cercle officiel (rayon 4,5 cm) :



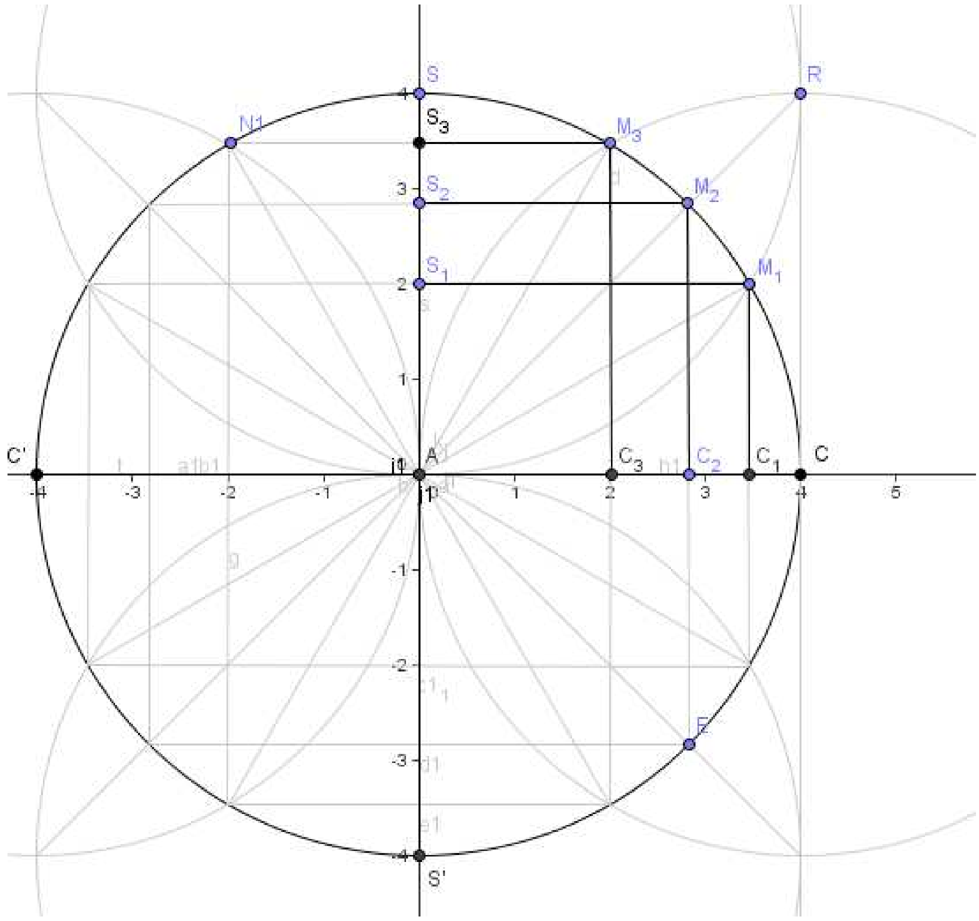
Cercle de rayon de 4 cm : donne la valeur 10° , et donc sa bissectrice donne celle de 5 °



Valeur Etalon de l' angle 16 ° qui va donner les bissectrice angulaire de 8°, 4°; 2°, 1°



4) Calculs Métriques sur les axes du premier quart de cercle :



En mesurant les distances : OC_1, OC_2, OC_3 *et* OS_3, OS_2, OS_1 ,
On observe que :

$$OC_1 = \frac{1}{2}\,OC \;et\; OS_1 = \frac{1}{2}\,OS$$

Comme le cercle trigonométrique a un rayon de 1 unité, soit mathématiquement :

$$R = OC = OC' = OS = OS' = OM_1 = OM_2 = OM_3 = 1$$

Alors

$$OC_1 = \frac{1}{2}\,(1) = \frac{1}{2} \;et\; OS_1 = \frac{1}{2}\,(1) = \frac{1}{2}$$

De plus les triangles $OC_1M_1, OC_2M_2, OC_3M_3$ et $OS_1M_1, OS_2M_2, OS_3M_3$ sont rectangles puisque les points C_i S_i sont les projections des points M_i appartenant au cercle sur l'axe des cosinus selon la direction de l'axe des sinus, ou sur l'axe des sinus selon la direction de l'axe des cosinus. Et comme l'axe des sinus et des cosinus sont orthogonaux entre eux au point centrale O, il vient que les segment M_iC_i sont orthogonaux à l'axes des cosinus, ainsi que les segment M_iS_i sont orthogonaux sur l'axe des sinus.

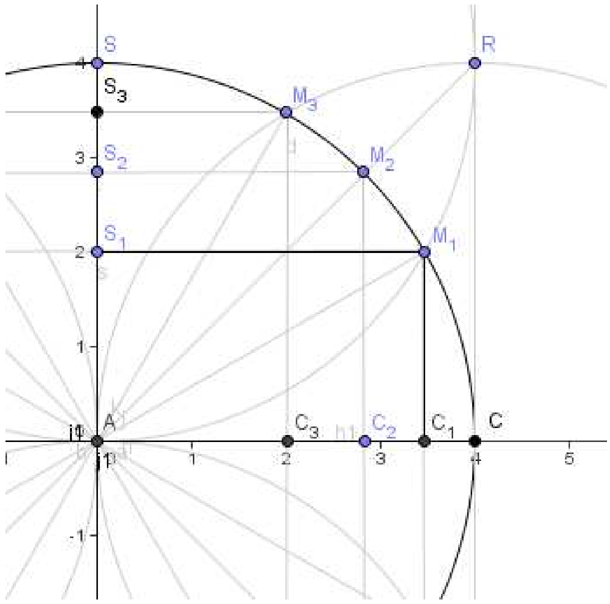
On peut donc appliquer le théorème de Pythagore soit :

$$(OC_i)^2 + (OS_i)^2 = (OM_i)^2$$

Soit pour les triangles OC_1M_1 , OS_1M_1 rectangle en C_1 et S_1, il vient que :

$$(OC_1)^2 + (OS_1)^2 = (OM_1)^2$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (OS_1)^2 = (1)^2 \Leftrightarrow OS_1 = \sqrt{(1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \Leftrightarrow OS_1 = \sqrt{\left(\frac{4-1}{4}\right)} \Leftrightarrow OS_1 = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

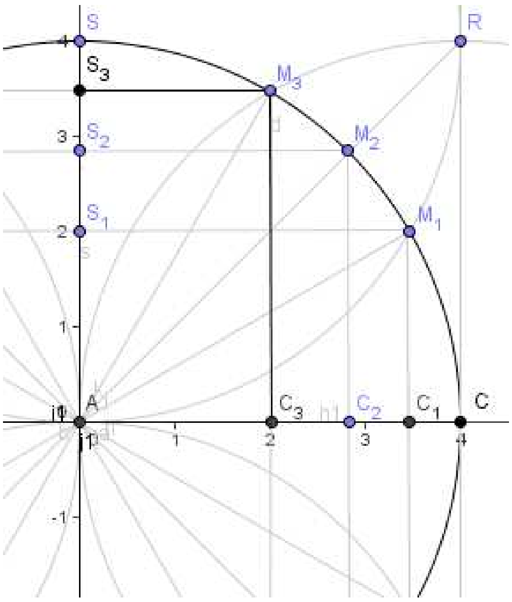
Soit le point M_1 a pour coordonnée : $M_1(OC_1 \quad OS_1) = M_1\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$



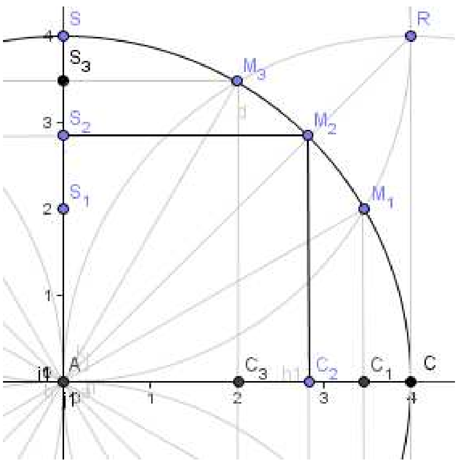
De même que pour le triangle OS_3M_3 rectangle en S_3, il vient que :

$$(OC_3)^2 + (OS_3)^2 = (OM_3)^2$$
$$\Leftrightarrow (OC_3)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = (1)^2 \Leftrightarrow OC_3 = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} \Leftrightarrow OS_1 = \sqrt{\left(\frac{4-1}{4}\right)} \Leftrightarrow OC_3 = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Le point M_3 a donc pour coordonnée trigonométrique : $M_3\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$



Pour le triangles OC_2M_2, OS_2M_2 rectangle en C_2 et S_2, on observe soit à l'aide de la règle, soit à l'aide du compas que les distances sont tel que $OC_2 = OS_2$



Soit en appliquant le théorème de Pythagore, il vient que :

$$\begin{cases} (OC_1)^2 + (OS_1)^2 = (OM_1)^2 \\ (OC_1)^2 = (OS_1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow (OC_1)^2 + (OC_1)^2 = (1)^2 \Leftrightarrow 2OC_1 = 1 \Leftrightarrow OC_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Le point M_3 a donc pour coordonnée trigonométrique : $M_2\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

2) FORMULES TRIGONOMETRIQUES

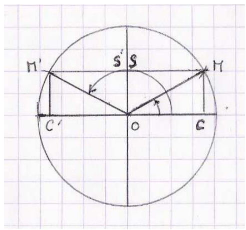
2.1) les formules de symétries trigonométriques :

$Soit\ \widehat{OM}'=\pi-x\ \ et\ \ \widehat{OM}=x$

$OC'=-OC \Rightarrow \cos(\pi-x)=-\cos(x)$

$OS'=OS \Rightarrow \sin(\pi-x)=\sin(x)$

$$\tan(\pi-x)=\frac{\sin(\pi-x)}{\cos(\pi-x)}=\frac{\sin(x)}{-\cos(x)}=-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=-\tan(x)$$

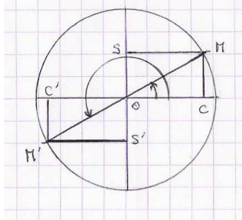


$Soit\ \widehat{OM}'=\pi+x\ \ et\ \ \widehat{OM}=x$

$OC=-OC' \Leftrightarrow \cos(\pi+x)=-\cos(x)$

$OS=-OS' \Leftrightarrow \sin(\pi+x)=-\sin(x)$

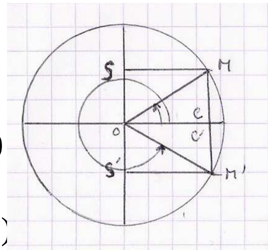
$$\tan(\pi+x)=\frac{\sin(\pi+x)}{\cos(\pi+x)}=\frac{-\sin(x)}{-\cos(x)}=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\tan(x)$$



$Comme\ 2\pi=0 \Rightarrow \widehat{OM}'=(3/2)\pi+x=2\pi-x=-x\ ;\widehat{OM}=x$

$OC'=OC \Rightarrow \cos(\frac{3}{2}\pi+x)=\cos(2\pi-x)=Cos(-x)=\cos(x)$

$OS'=-OS \Rightarrow \sin(\frac{3}{2}\pi+x)=\sin(2\pi-x)=\sin(-x)=-\sin(x)$



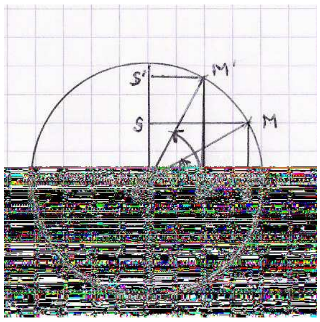
$$\tan(\frac{3}{2}\pi+x)=\tan(2\pi-x)=\tan(-x)=\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}=-\tan(x)$$

$Soit\ \widehat{OM}'=\frac{\pi}{2}-x\ \ ;\ \ \widehat{OM}=x$

$OC'=OS \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin(x)$

$OS'=OC \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos(x)$

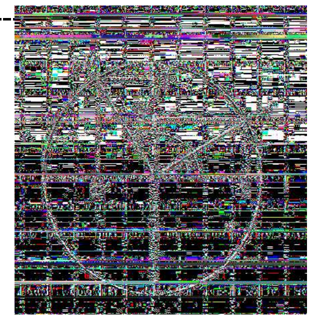
$$\tan(\frac{\pi}{2}-x)=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\cos(\frac{\pi}{2}-x)}=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}=\frac{1}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}=\frac{1}{\tan(x)}$$



$\cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin(x)$

$\sin(\frac{\pi}{2}+x)=\cos(x)$

$$\tan(\frac{\pi}{2}+x)=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+x)}{\cos(\frac{\pi}{2}+x)}=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}=\frac{1}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}=\frac{1}{\tan(x)}$$



a) Symétrie des lignes trigonométrique du premier et deuxième quart de cercle :

Rappel : $angle\,\widehat{COM} = Vecteur\ angulaire\ ou\ angle\ vectoriel\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM}}\right) = arc\,\widehat{CM}$

Sachant que Sachant que M(x ; y) = M(cos(x) ; sin(x)), alors :

$$\begin{cases} \widehat{COM_1} = \widehat{M_7OC} \Leftrightarrow \widehat{CM_1} = \widehat{M_7C} \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_1}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OM_7};\overrightarrow{OC'}}\right) = \frac{\pi}{6} \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_7}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OM_7};\overrightarrow{OC}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}}\right) = \pi \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_7}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}}\right) - \left(\widehat{\overrightarrow{OM_7};\overrightarrow{OC}}\right) = (\pi - \frac{1}{6}\pi) = \frac{5}{3}\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_1}}\right) = \frac{\pi}{6} \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_7}}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} \\ M_7C'_3 = -M_1C_3 \\ M_7S_3 = M_1S_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}; \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{cases}$$

on démontrerai de la même manière que :

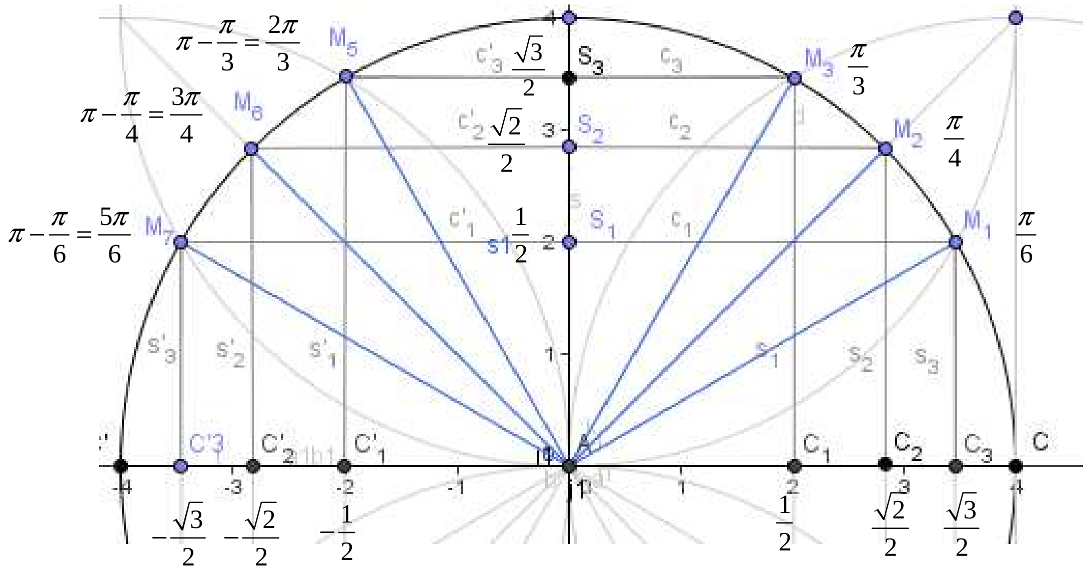
$$\begin{cases} \widehat{COM_2} = \widehat{M_2OC} \Leftrightarrow \widehat{CM_2} = \widehat{M_6C} \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_2}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OM_6};\overrightarrow{OC'}}\right) = \frac{\pi}{4} \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_2}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OM_2};\overrightarrow{OC'}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}}\right) = \pi \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_2}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}}\right) - \left(\widehat{\overrightarrow{OM_2};\overrightarrow{OC}}\right) = (\pi - \frac{1}{4}\pi) = \frac{5}{4}\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_1}}\right) = \frac{\pi}{4} \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_7}}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} \\ M_6C'_2 = -M_2C_2 \\ M_6S_2 = M_2S_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\left(\frac{\pi}{4}\right);\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ Sin\left(\left(\frac{\pi}{4}\right);\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widehat{COM_3} = \widehat{M_5OC} \Leftrightarrow \widehat{CM_3} = \widehat{M_5C} \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_5}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OM_3};\overrightarrow{OC'}}\right) = \frac{\pi}{3} \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_3}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OM_3};\overrightarrow{OC}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}}\right) = \pi \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_7}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}}\right) - \left(\widehat{\overrightarrow{OM_7};\overrightarrow{OC}}\right) = (\pi - \frac{1}{3}\pi) = \frac{5}{6}\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_3}}\right) = \frac{\pi}{3} \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_7}}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} \\ M_5C_1 = -M_1C'_3 \\ M_5S_3 = M_1S_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\left(\frac{\pi}{3}\right);\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ Sin\left(\left(\frac{\pi}{3}\right);\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

Donc les points M_i ont pour coordonnées sur les axes trigonométrique :

$\widehat{OM_1}\left(\frac{\pi}{6}\right) = M_1\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$; $\widehat{OM_2}\left(\frac{\pi}{4}\right) = M_2\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$; $\widehat{OM_3}\left(\frac{\pi}{6}\right) = M_3\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$;

$\widehat{OM_5}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = M_5\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$; $\widehat{OM_6}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = M_6\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$;$\widehat{OM_7}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = M_7\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$



b) Symétrie des lignes trigonométrique du premier et troisième quart de cercle :

Sachant que dans le cercle de rayon R=1 unité, M(x; y) = M(cos(x) ; sin(x)), alors :

$$\begin{cases}\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_1}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{OC'};\overrightarrow{OM_9};}\right)=\dfrac{\pi}{6}\\ \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_1}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{OM_1};\overrightarrow{OC'}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}}\right)=\pi\\ \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_9}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}}\right)-\left(\widehat{\overrightarrow{OC'};\overrightarrow{OM_9}}\right)=(\pi+\dfrac{1}{6}\pi)=\dfrac{7}{6}\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_1}}\right)=\dfrac{\pi}{6}\\ \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_9}}\right)=\dfrac{7}{6}\pi\Rightarrow\\ M_9C'_3=-M_1C_3\\ M_9S'_3=-M_1S_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\left(\left(\dfrac{\pi}{6}\right);\left(\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)\right)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ Sin\left(\left(\dfrac{\pi}{6}\right);\left(\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)\right)=\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)\end{cases}$$

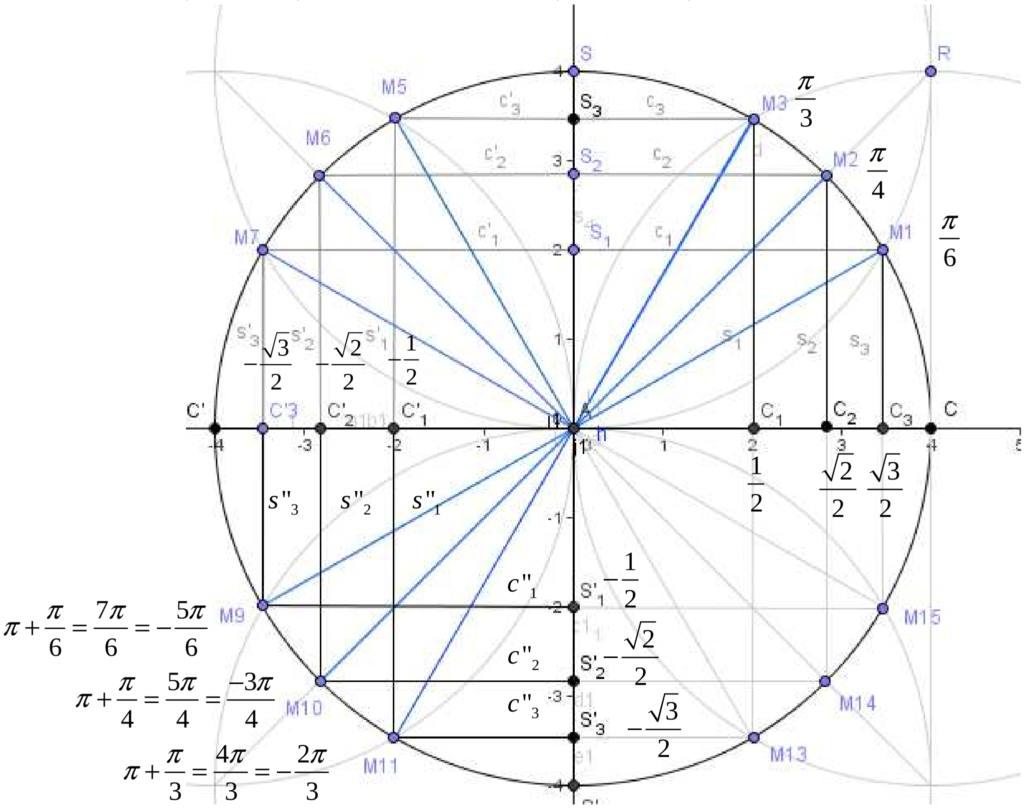
$$\begin{cases}\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_2};}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{OC'};\overrightarrow{OM_{10}}}\right)=\dfrac{\pi}{4}\\ \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_2}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{OM_2};\overrightarrow{OC'}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}}\right)=\pi\\ \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_{10}}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{OC'};\overrightarrow{OM_{10}};}\right)=(\pi+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{5}{4}\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_2}}\right)=\dfrac{\pi}{4}\\ \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_{10}}}\right)=\dfrac{5}{4}\pi\Rightarrow\\ M_2C_2=-M_{10}C'_2\\ M_2S_2=-M_{10}S'_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\left(\left(\dfrac{\pi}{4}\right);\left(\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ Sin\left(\left(\dfrac{\pi}{4}\right);\left(\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(\widehat{\overrightarrow{OC'};\overrightarrow{OM_3};}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{OC'};\overrightarrow{OM_{11}}}\right)=\dfrac{\pi}{3}\\ \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_3}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{OM_3};\overrightarrow{OC'}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}}\right)=\pi\\ \left(\widehat{\overrightarrow{OC'};\overrightarrow{OM_{11}}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{OC'};\overrightarrow{OM_{11}};}\right)=(\pi+\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{4}{3}\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_1}}\right)=\dfrac{\pi}{3}\\ \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_7}}\right)=\dfrac{4}{3}\pi\Rightarrow\\ M_{11}C'_1=-M_3C_1\\ M_{11}S'_3=-M_3S_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\left(\left(\dfrac{\pi}{4}\right);\left(\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)\right)=\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)\\ Sin\left(\left(\dfrac{\pi}{4}\right);\left(\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)\right)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\end{cases}$$

Donc les points M_i ont pour coordonnées sur les axes trigonométriques :

$\widehat{OM_1}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=M_1\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$; $\widehat{OM_2}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=M_2\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$; $\widehat{OM_3}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=M_3\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$;

$\widehat{OM_9}\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)=M_5\begin{pmatrix}-\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$; $\widehat{OM_{10}}\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)=M_6\begin{pmatrix}-\dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$;$\widehat{OM_{11}}\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)=M_{11}\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$



c) Symétrie des lignes trigonométrique du premier et quartrième quart de cercle :

Sachant que dans le cercle de rayon R=1 unité, M(x; y) = M(cos(x) ; sin(x)), alors :

$$\begin{cases} \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_1}}\right) = -\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_{13}};}\right) = -\frac{\pi}{3} \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OC'};\overrightarrow{OC}}\right) = \pi+\pi = 2\pi = 0 \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_{13}}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC}}\right) - \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_{13}}}\right) = 2\pi - \frac{\pi}{3} = (0-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_3}}\right) = \frac{\pi}{3} \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_{13}}}\right) = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \\ M_{13}C'_1 = M_1C_1 \\ M_{13}S'_3 = -M_1S_3 \end{cases} \begin{cases} \cos\left(\left(\frac{\pi}{3}\right);\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) \\ Sin\left(\left(\frac{\pi}{3}\right);\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

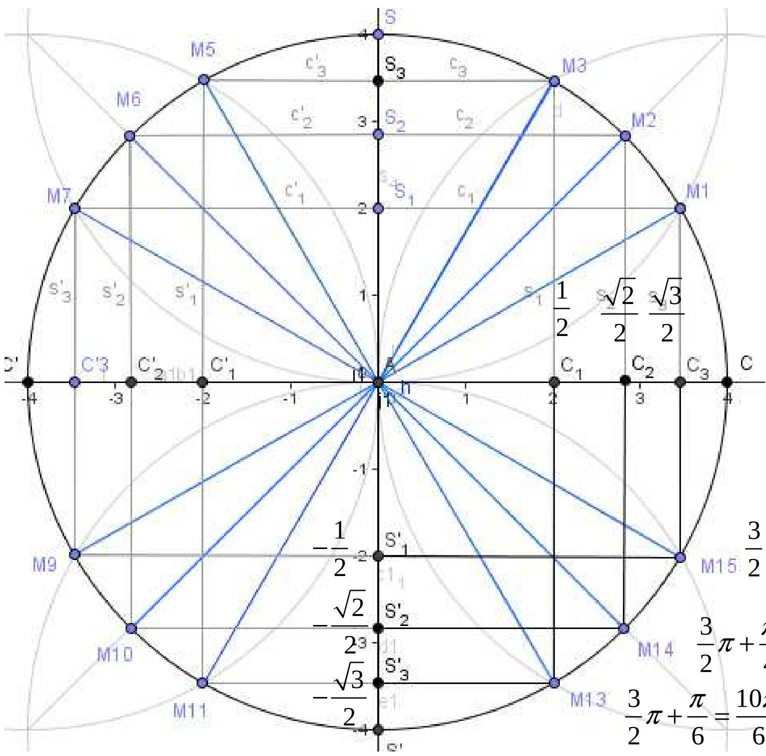
$$\begin{cases} \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_{14}};}\right) = -\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_2}}\right) = -\frac{\pi}{4} \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OC_1};\overrightarrow{OC'}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}}\right) = \pi+\pi = 2\pi = 0 \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_{14}}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC}}\right) - \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_{14}}}\right) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = (0-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_2}}\right) = \frac{\pi}{4} \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_{14}}}\right) = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \\ M_{14}C'_2 = M_2C_2 \\ M_{14}S'_2 = -M_2S_2 \end{cases} \begin{cases} \cos\left(\left(\frac{\pi}{4}\right);\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ Sin\left(\left(\frac{\pi}{4}\right);\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_{15}};}\right) = -\left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_3}}\right) = -\frac{\pi}{4} \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OC_1};\overrightarrow{OC'}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}}\right) = \pi+\pi = 2\pi = 0 \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_{15}}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC}}\right) - \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_{15}}}\right) = 2\pi - \frac{\pi}{6} = (0-\frac{\pi}{6}) = -\frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_3}}\right) = \frac{\pi}{3} \\ \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_{15}}}\right) = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \\ M_{15}C'_3 = M_1C_3 \\ M_{15}S'_1 = -M_1S_1 \end{cases} \begin{cases} \cos\left(\left(\frac{\pi}{6}\right);\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ Sin\left(\left(\frac{\pi}{6}\right);\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Donc les points M_i ont pour coordonnées sur les axes trigonométriques :

$\widehat{OM}_1\left(\frac{\pi}{6}\right) = M_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{2}\right)$; $\widehat{OM}_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = M_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\widehat{OM}_3\left(\frac{\pi}{6}\right) = M_3\left(\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

$\widehat{OM}_{13}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = M_{13}\left(\frac{1}{2} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\widehat{OM}_{14}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = M_6\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\widehat{OM}_{15}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = M_{15}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \quad -\frac{1}{2}\right)$



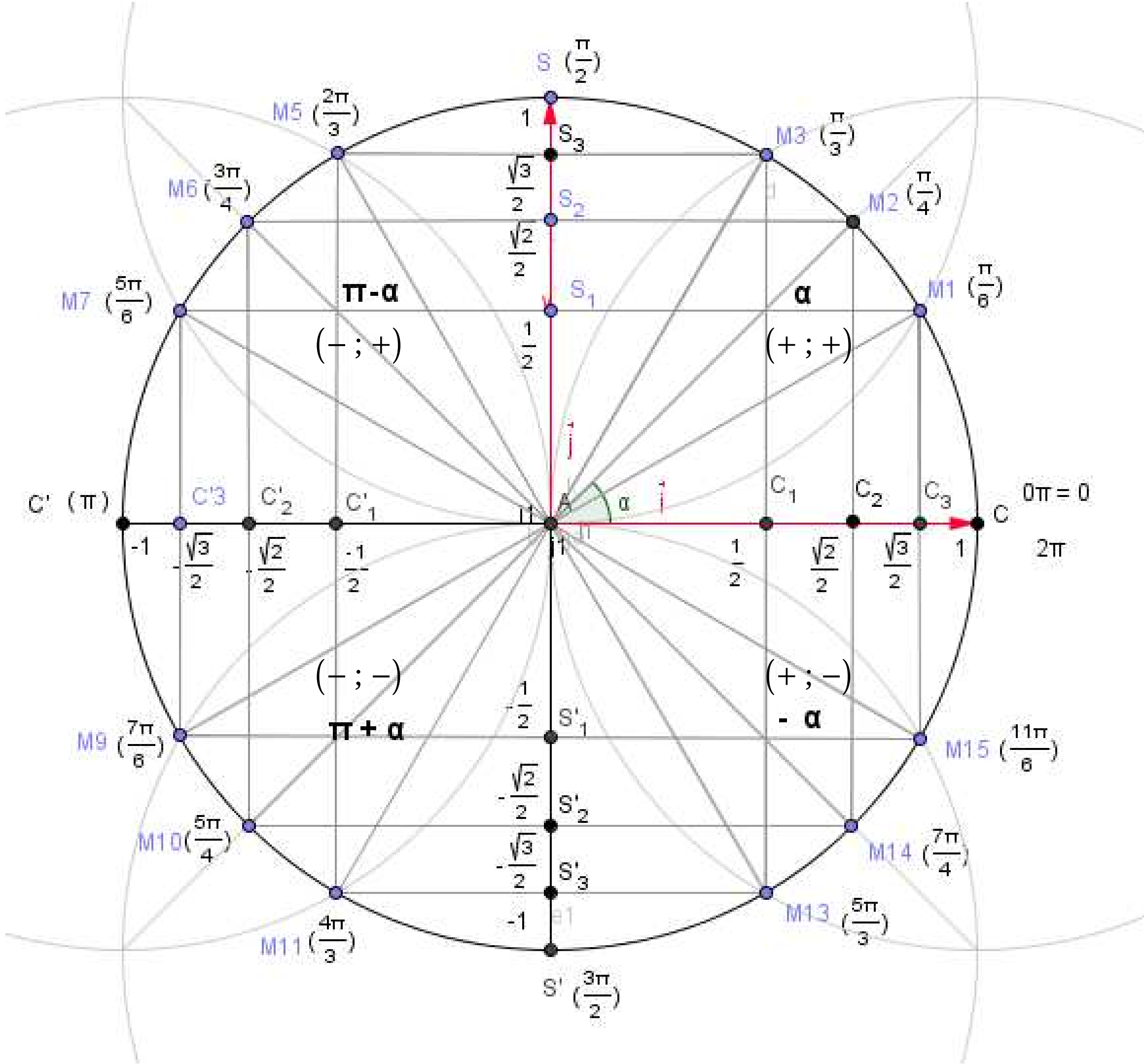
$$\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{(9+2)\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$$

d) Synthèse : Valeurs remarquables angulaires et rectangulaires des lignes trigonométriques

De manière globale, les coordonnées rectangulaires et angulaires trigonométriques ont pour valeurs :



e) Résumé des formules symétriques :

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$
$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$
$$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$
$$\tan(\pi + x) = \tan(x)$$

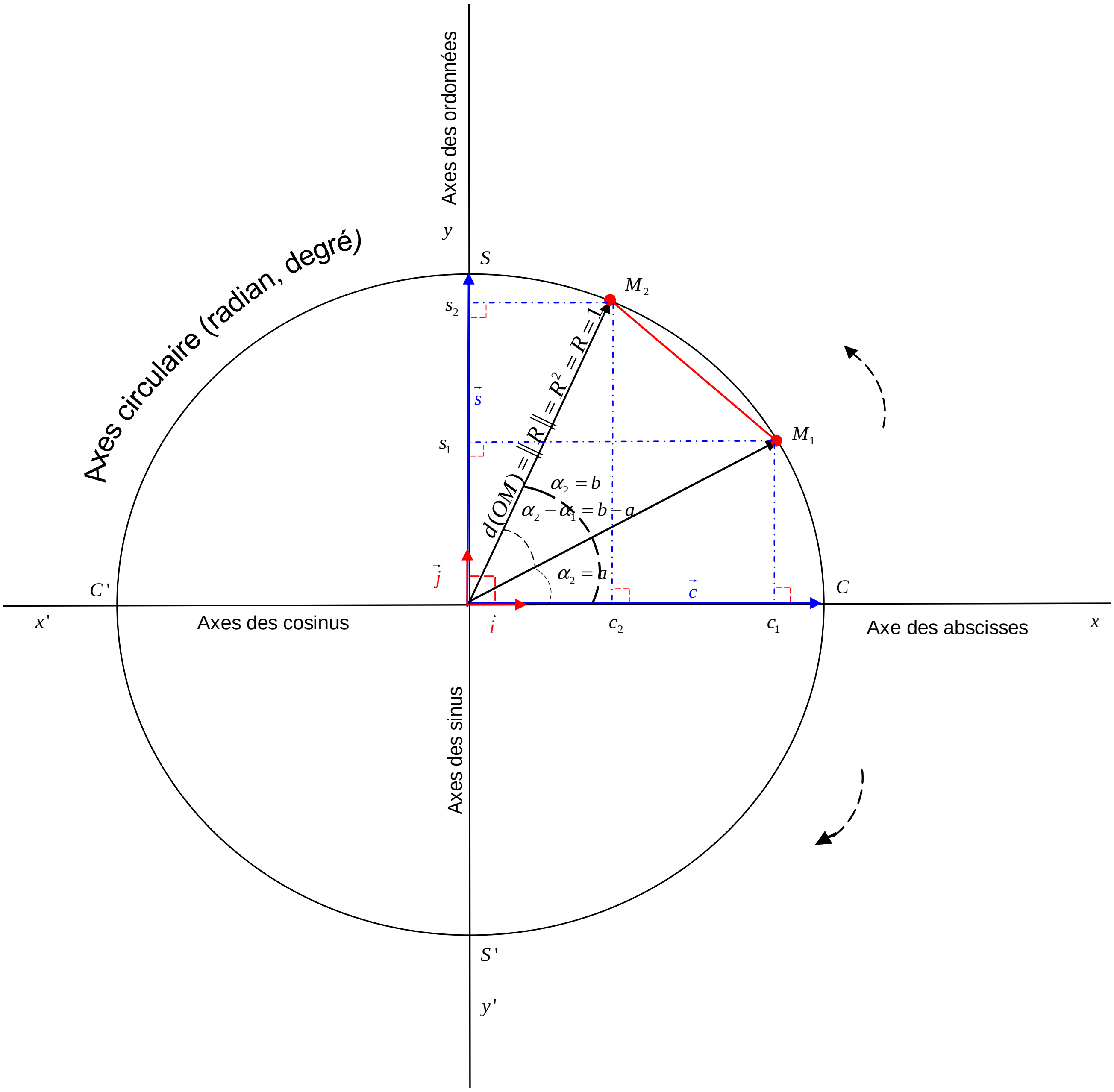
$$Cos(-x) = \cos(x)$$
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$
$$\tan(-x) = -\tan(x)$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$$
$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$$
$$\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \tan(x)$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$$
$$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$$
$$\tan(\frac{\pi}{2} + x) = \frac{1}{\tan(x)}$$

2.2) Le Produit Scalaire dans le Plan Orthonormé et Trigonométrique

Représentation géométriquo-trigonométrique



En posant : $u_0 = \overrightarrow{OC}; \vec{u} = \overrightarrow{OM_2}, \vec{v} = OM_1;$, On constate que :

$$\widehat{COM_1} - \widehat{COM_2} = \widehat{M_1OM_2} \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_2}}\right) - \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OM_1}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OM_1};\overrightarrow{OM_2}}\right) \Leftrightarrow \left(\widehat{u_0;v}\right) - \left(\widehat{u_0;u}\right) = \left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$$

Il vient que :

$$\begin{cases} \vec{u}(x_u;y_u) = \left(x_u\vec{i} + y_u\vec{j}\right) \\ \vec{v}(x_v;y_v) = \left(x_v\vec{i} + y_v\vec{j}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \vec{u}.\vec{v} = \left(x_u\vec{i} + y_u\vec{j}\right)\left(x_v\vec{i} + y_v\vec{j}\right) \\ \vec{u}.\vec{v} = (x_u\vec{i})(x_v.\vec{i}) + (x_u\vec{i})(y_v.\vec{j}) + (y_u\vec{j}).(x_v\vec{i}) + (y_u\vec{j})(y_v\vec{j}) \\ \vec{u}.\vec{v} = (x_u)(x_v).(\vec{i})(\vec{i}) + (x_u)(y_v).(\vec{i})(\vec{j}) + (y_u)(x_v)(\vec{j})(\vec{i}) + (y_u)(y_v)(\vec{j})(\vec{j}) \\ \vec{u}.\vec{v} = (x_u)(x_v).(\vec{i})^2 + (x_u)(y_v).(\vec{i})(\vec{j}) + (y_u)(x_v)(\vec{j})(\vec{i}) + (y_u)(y_v)(\vec{j})^2 \end{array} \right.$$

Ors dans le plan orthonormé $\Re(0;i;j)$, les vecteurs $\vec{i}$, et $\vec{j}$, représentent respectivement les vecteurs unitaires des axes des abscisses et des ordonnées, formant un couple $(\vec{i};\vec{j})$ appelé base du repère. L'axe des abscisses étant horizontale, l'axe des ordonnées étant vertical, il vient que l'axe des ordonnées est sécant à l'axe des abscisses, tel que l'intersection de ces deux droites représente le centre ou origine du repère. De plus cet intersection forment quatre paires de deux demi-droites tel que ses demi-droites engendrent quatre régions égales, appelé angles. Puisque ces quatre angles sont égaux, alors la droite horizontale sécant à la droite verticale forment quatre angles droits. Puisque $\vec{i}$ et $\vec{j}$, sont vecteurs unitaires appartenant à ces axes, alors $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux, et puisqu'ils sont vecteurs unitaires, ils ont une mesure (ou dimension métrique), soit une norme (ou dimension métrique vectorielle). Donc il vient que leurs coordonnées sont :

$$\begin{cases}\vec{i}=1\vec{i}+0\vec{j}\\ \vec{j}=0\vec{i}+1\vec{j}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{i}(1;0)\\ \vec{j}(0;1)\end{cases}$$

Ecrivons, par soucis de distinction, x pour une sous mesure de i et y une sous mesure de j. Alors il vient des proportionnalités et des axiomes d'orthogonalité que :

$$\begin{cases}\exists x\in\vec{i}\ et\ (xx)//\vec{i}\\ \exists y\in\vec{j}\ et\,(Oy)//\vec{j}\end{cases} tel\,que\begin{cases}\begin{cases}\vec{i}\neq\vec{j}\\ \widehat{io\,j}=\widehat{joi}\neq\dfrac{\pi}{4}\end{cases}\\ x=k\vec{i};\,y=k\vec{j}\\ \begin{cases}\|\vec{i}\|=\sqrt{1^2+0}=1\\ \|\vec{j}\|=\sqrt{0+1^2}=1\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{i}\perp\vec{j}\\ \|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|\\ \begin{cases}\vec{i}=kx+0y\\ \vec{j}=0x+ky\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{kx}{ax}=\dfrac{by}{ky}\Leftrightarrow kxky=ax.by\Leftrightarrow k^2xy=0x.0y\\ ax=0x\\ by=0y\end{cases}$$

$$\begin{cases}\begin{cases}k^2x.y=0x.0y\\ \vec{i}.j=k^2x.y\end{cases}\Leftrightarrow\vec{i}.\vec{j}=0x.0\,y.\Leftrightarrow\|\vec{i}\|.\|\vec{j}\|=0\Leftrightarrow\vec{i}.\vec{j}=\vec{0}\\ \begin{cases}\|\vec{i}\|.\|\vec{i}\|=\left(\sqrt{1^2+0}\right)\left(\sqrt{1^2+0}\right)=1.1=1\\ \|\vec{j}\|.\|\vec{j}\|=\left(\sqrt{0^2+1}\right)\left(\sqrt{0^2+1}\right)=1.1=1\end{cases} et\begin{cases}\|\vec{i}.\vec{i}\|=\|\vec{i}^{\,2}\|=\left(\sqrt{1^2+0^2}\right)^2=\left(\sqrt{1}\right)^2=1\\ \|\vec{j}.\vec{j}\|=\|\vec{j}^{\,2}\|\left(\sqrt{0^2+1^2}\right)^2=\left(\sqrt{1}\right)^2=1\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{i}.\vec{j}=\vec{0}\\ \vec{i}=\vec{i}^{\,2}\\ \vec{j}=\vec{j}^{\,2}\end{cases}$$

Par conséquent :

$$\vec{u}.\vec{v}=(x_u)(x_v).(\vec{i})^2+(x_u)(y_v).(\vec{i})(\vec{j})+(y_u)(x_v)(\vec{j})(\vec{i})+(y_u)(y_v)(\vec{j})^2$$
$$\vec{u}.\vec{v}=(x_u)(x_v).(1)+(x_u)(y_v).(0)+(y_u)(x_v)(0)+(y_u)(y_v)(1)$$
$$\vec{u}.\vec{v}=(x_u)(x_v)+(y_u)(y_v)$$

Par suite, on pourrait encore écrire que :

$$\begin{cases}\vec{i}\perp\vec{j}\Leftrightarrow\cos\left(\widehat{\vec{i};\vec{j}}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0\\ \exists\overrightarrow{f_f}=O;\vec{i};\vec{j}\ tel\,que\,\vec{i}\perp\vec{j}\Leftrightarrow O;\vec{i};\vec{j}=triangle\Rightarrow\dfrac{\vec{i}}{\vec{j}}=\cos\left(\widehat{\vec{i};\vec{j}}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\vec{i}=\vec{j}\cos\left(\widehat{\vec{i};\vec{j}}\right)\Leftrightarrow\vec{i}.\vec{j}=\vec{j}^{\,2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$$

Ou encore matriciellement, quand $\vec{i}\perp\vec{j}$, on a :

$$\begin{pmatrix}\vec{1}_1 & \vec{0}_2\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}\vec{0}_1\\ \vec{1}_2\end{pmatrix}=1.0+0.1=0\quad\text{ou}\quad\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}^{-1}=1.0+0.1=0$$

2.3) Les Formules d'additions trigonométriques :

a) Produit scalaire

$$\begin{cases} \begin{cases} (\vec{u}\ \vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v}) \\ \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = R = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (\vec{u}\ \vec{v}) = \cos(\vec{u},\vec{v}) = X\ X' + Y\,Y' \\ (X\,;X';Y;Y') = (\ \cos(u)\ ;\ \cos(v)\ ;\ \sin(u)\ ;\ \sin(v)\ ) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\vec{u}\ \vec{v}) = Cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \cos(u)\ \cos(v) + \sin(u)\ \sin(v)$$

b) Additions binomiales des angles du cosinus

- Cos (a-b)

Soit en posant $\left(\widehat{u_0;v}\right) = b;\left(\widehat{u_0;u}\right) = a$, on peut écrire :

$$\begin{cases} Cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \cos(u)\ \cos(v) + \sin(u)\ \sin(v) \\ (\vec{u}\ \vec{v}) = Cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = \cos\left[\ \left(\widehat{u_0;v}\right) - \left(\widehat{u_0;u}\right)\right] = Cos(b-a) \quad car\ \|R\| = R = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow Cos\,(b-a) = \cos(b)\cos(a) + \sin(b)\sin(a)\,(\vec{u}\ \vec{v})$$

- Cos (b+a)

$$Cos\,(b+a) = Cos(b-(-a))$$
$$Cos\,(b+a) = \cos(b)\cos(-a) + \sin(b)\sin(-a)$$
$$\Leftrightarrow Cos\,(b+a) = \cos(a)(\cos(b)) - \sin(a)(\sin(b))$$

c) Additions binomiales des angles du sinus :

- Sin (b + a)

$$Sin\,(b+a) = sin\,(A) = cos\,(\frac{\pi}{2} - A) = cos(\frac{\pi}{2} - (b+a)) = cos((\frac{\pi}{2} - b) - a)) = cos((B) - (+a))$$

$$Soit: Cos\,((B-a)) = \cos(B)\cos(-a) + \sin(B)\sin(a)$$

$$\Leftrightarrow \quad Cos\,(\frac{\pi}{2} - b) - a)) = \cos(\frac{\pi}{2} - b)\cos(a) + \sin(\frac{\pi}{2} - b)\sin(a)$$

$$\Leftrightarrow \quad Sin\,(b+a) = \sin(b)\cos(a) + \cos(-b)\sin(a)$$

$$\Leftrightarrow \quad Sin\,(b+a) = \sin(b)\cos(a) + \cos(b)\sin(a)$$

- Sin (b – a)

$$Sin\,(b-a) = \sin(b+(-a))$$
$$\Leftrightarrow \quad Sin\,(b-a) = \sin(b)\cos(-a) - \cos(b)\sin(-a)$$
$$\Leftrightarrow \quad Sin(b-a) = \sin(b)\cos(a) + \cos(b)\sin(a)$$

d) Additions binomiales des angles de la tangeante :

- Tan (b – a)

$$Tan(b-a)=\frac{\sin(b-a)}{\cos(b-a)}=\frac{\sin(b)\cos(a)-\cos(b)\sin(a)}{\cos(b)\cos(a)+\sin(b)\sin(a)}$$

$$Ors\ f=\frac{A}{B}=\frac{A}{B}\times 1=\frac{A}{B}\times\frac{\frac{1}{B}}{\frac{1}{B}}=\frac{A\times\frac{1}{B}}{B\times\frac{1}{B}}=\frac{\frac{A}{B}}{\frac{B}{B}},\quad d'où\ on\ peut\ écrire:$$

$$\Leftrightarrow Tan(b-a)=\frac{\frac{\sin(b)\cancel{\cos(a)}}{\cos(b)\cancel{\cos(a)}}-\frac{\cancel{\cos(b)}\sin(a)}{\cancel{\cos(b)}\cos(a)}}{\frac{\cancel{\cos(b)\cos(a)}}{\cancel{\cos(b)\cos(a)}}-\frac{\sin(b)\sin(a)}{\cos(b)\cos(a)}}$$

$$\Leftrightarrow Tan(b-a)=\frac{\frac{\sin(b)}{\cos(b)}-\frac{\sin(a)}{\cos(a)}}{1-\frac{\sin(b)}{\cos(b)}\times\frac{\sin(a)}{\cos(a)}}$$

$$\Leftrightarrow \tan(b-a)=\frac{\tan(b)-\tan(a)}{1-\tan(b)\tan(a)}$$

- tan (b + a)

$$\tan(b+a)=\frac{\sin(b+a)}{\cos(b+a)}=\frac{\sin(b)\cos(a)+\cos(b)\sin(a)}{\cos a(\cos b)-\sin a\ \sin(b)}$$

$$\Leftrightarrow \tan(b+a)=\frac{\frac{\sin(b)\cos(a)}{\cos a(\cos b)}+\frac{\cos(b)\sin(a)}{\cos a(\cos b)}}{\frac{\cos a(\cos b)}{\cos a(\cos b)}-\frac{\sin a\ \sin(b)}{\cos a(\cos b)}}$$

$$\Leftrightarrow \tan(b+a)=\frac{\frac{\sin(b)}{\cos(a)}+\frac{\sin(a)}{\cos(a)}}{1-\frac{\sin(a)}{\cos(a)}\frac{\sin(b)}{(\cos b)}}$$

$$\Leftrightarrow \tan(b+a)=\frac{\tan(b)+\tan(a)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$

e) Résumé des formules d'addtions trigonométriques

$$Cos(b-a)=\cos(b)\cos(a)+\sin(b)\sin(a)$$
$$Cos(b+a)=\cos(a)(\cos b)-\sin(a)\ \sin(b)$$

$$\tan(b-a)=\frac{\tan(b)-\tan(a)}{1-\tan(b)\tan(a)}$$

$$Sin(b-a)=\sin(b)\cos(a)-\cos(b)\sin(a)$$
$$Sin(b+a)=\sin(b)\cos(a)+\cos(b)\sin(a)$$

$$\tan(b+a)=\frac{\tan(b)+\tan(a)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$

f) Exemples numériques

Des propriétés opératoires angulaires, on a par tâtonnement :

$$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{(4-3)\pi}{12}=\frac{\pi}{12}$$

On trouve donc :

$$\begin{aligned}
&\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)+\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)\\
\Leftrightarrow\ &\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\\
\Leftrightarrow\ &\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\
\Leftrightarrow\ &\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\\
\Leftrightarrow\ &\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)+\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\\
\Leftrightarrow\ &\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)
\end{aligned}$$

Autre type de résolution de niveau Bac + 2 en terme d'écriture :

$$\begin{pmatrix}Cos(A)\\ Sin(A)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Cos(a-b)\\ Sin(a-b)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Cos(a)Cos(b)+Sin(a)Sin(b)\\ \sin(a)\cos(b)-\cos(a)Sin(b)\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix}\circ\left(\frac{\pi}{12}\right)=\begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix}\circ\left(\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix}\circ\left(\frac{\pi}{12}\right)=\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix}\circ\left(\frac{\pi}{12}\right)=\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix}\circ\left(\frac{\pi}{12}\right)=\begin{pmatrix}\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)\\ \left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)\end{pmatrix}$$

2.4) <u>Duplication d'angle</u> :

En posant b = a, on a par la formule $\cos(a+b)=\cos(a).\cos(b)-\sin(a).\sin(b)$:

$$\begin{aligned}
&Cos(2a)=\cos(a+a)\\
\Leftrightarrow\ &Cos(2a)=\cos(a).\cos(a)-\sin(a).\sin(a)\\
\Leftrightarrow\ &Cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)
\end{aligned}$$

De même que par la formule $Sin(a+b)=\sin(a).\cos(b)+\cos(a).\sin(b)$, on a:

$$\begin{aligned}
&\sin(2a)=\sin(a+a)\\
\Leftrightarrow\ &\sin(2a)=\sin(a).\cos(a)+\cos(a).\sin(a)\\
\Leftrightarrow\ &\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)
\end{aligned}$$

$$\cos^2(a)+\sin^2(a)=1 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin^2(a)=1-\cos^2(a)\\ \sin^2(a)=1-\sin^2(a)\end{cases}$$

On peut écrire encore :

$$\left|\begin{aligned}
&Cos(2a)=\cos^2(a)-\left(\sin^2(a)\right)\\
\Leftrightarrow\ &Cos(2a)=\cos^2(a)-(1-\cos^2(a))\\
\Leftrightarrow\ &Cos(2a)=\cos^2(a)-1+\cos^2(a)*\\
\Leftrightarrow\ &Cos(2a)=2\cos^2(a)-1
\end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \cos^2(a)=\frac{\cos(2a)-1}{2}$$

Et

$$\left|\begin{aligned}
&Cos(2a)=\left(\cos^2(a)\right)-\sin^2(a)\\
\Leftrightarrow\ &Cos(2a)=1-\sin^2(a)-\sin^2(a)\\
\Leftrightarrow\ &Cos(2a)=1-2\sin^2(a)
\end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow\ \sin^2(x)=\frac{\cos(2a)-1}{-2} \Leftrightarrow \sin^2(x)=\frac{1-\cos(2a)}{2}$$

Il vient que la tangeante à l'aide de la formule $\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$:

$$\begin{aligned}
&\tan(2a)=\tan(a+a)\\
\Leftrightarrow\ &\tan(2a)=\frac{\tan(a)+\tan(a)}{1-\tan(a)\tan(a)}\\
\Leftrightarrow\ &\tan(2a)=\frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}
\end{aligned}$$

En résumé

$$\begin{cases}Cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)\\ \sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}Cos(2a)\\ \sin(2a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^2(a)-\sin^2(a)\\ 2\sin(a)\cos(a)\end{pmatrix}$$

$$\tan(2a)=\tan(a+a)=\frac{\tan(a)+\tan(a)}{1-\tan(a)\tan(a)}=\frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

2.5) duplication de demi angle :

Des formules :

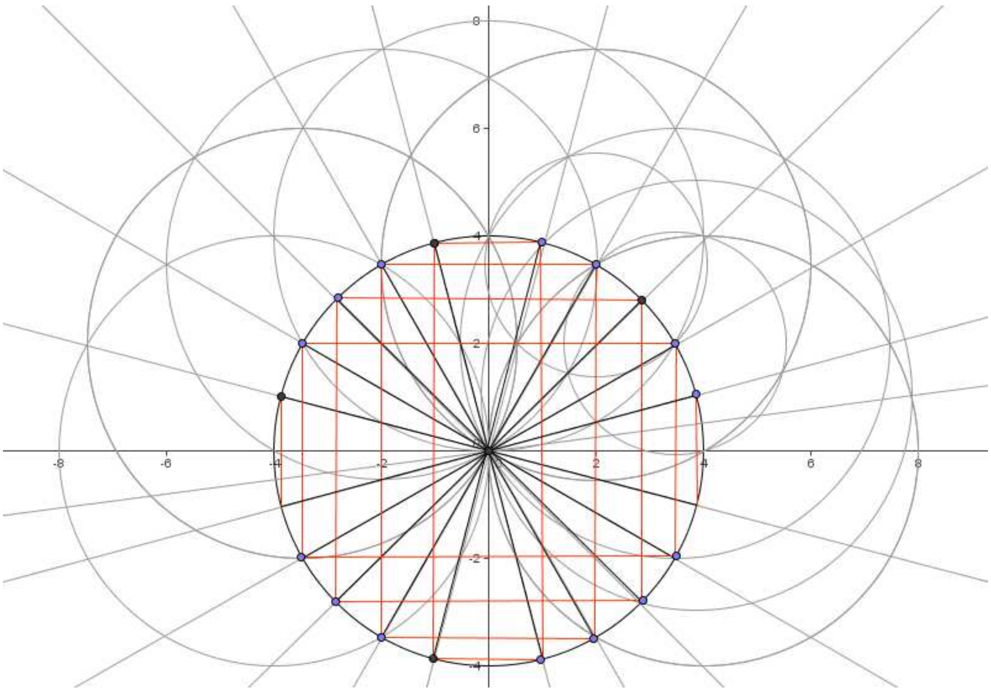
$$\cos^2(a)=\frac{\cos(2a)-1}{2} \text{ et } \sin^2(x)=\frac{1-\cos(2a)}{2}$$

En posant $a=\frac{b}{2}$, il vient que :

$$\begin{cases}\cos^2\left(\frac{b}{2}\right)=\dfrac{\cos\left(2\left(\frac{b}{2}\right)\right)-1}{2}\\ \sin^2\left(\frac{b}{2}\right)=\dfrac{1-\cos\left(2\left(\frac{b}{2}\right)\right)}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos^2\left(\frac{b}{2}\right)=\dfrac{\cos(b)-1}{2}\\ \sin^2\left(\frac{b}{2}\right)=\dfrac{1-\cos(b)}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{\cos^2\left(\frac{b}{2}\right)}=\sqrt{\dfrac{\cos(b)-1}{2}}\\ \sqrt{\sin^2\left(\frac{b}{2}\right)}=\sqrt{\dfrac{1-\cos(b)}{2}}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(\frac{b}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{\cos(b)-1}{2}}\\ \sin\left(\frac{b}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{1-\cos(b)}{2}}\end{cases}$$

$$\tan^2\left(\frac{b}{2}\right)=\frac{\sin^2\left(\frac{b}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{b}{2}\right)}=\frac{\frac{1-\cos(b)}{2}}{\frac{\cos(b)-1}{2}}=\frac{1-\cos(b)}{2}\times\frac{2}{\cos(b)-1}=\frac{1-\cos(b)}{\cos(b)-1}\Leftrightarrow\tan\left(\frac{b}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos(b)}{\cos(b)-1}}$$



Exemple numérique 1 :

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=g\left(2\frac{\pi}{8}\right)\Leftrightarrow Cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=Cos\left(2\frac{\pi}{8}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}Cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\\ Cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\dfrac{1-Cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}\\ \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\dfrac{Cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-1}{2}\end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases}Cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\dfrac{1-Cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}}=\sqrt{\dfrac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)-1\Leftrightarrow\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+1}{2}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}+2}{4}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+2}{4}}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\end{cases}$$

Bon, en terme de livre, ce sont des exemples communs que tous le monde prend, copie, résout selon deux trois manières, il n'y a rien de glorieux en terme d'exercice hormis pour la personne qui découvre pour la première fois, et les autres, comme moi, d'ailleurs, pour qui, une bonne révision s'impose soit avant d'attaquer des exercices plus sophistiquer ou d'attaquer la science physique. En plus en terme de copie informatique, cela nous sauvegarde, tant par les imprimeurs que par les satellites, ainsi que l'Etat. D'ailleurs les professeurs nouveaux, hormis ceux que vous vérifier, sous différentes méthodes, ne vous hasardez pas de trop, informatiquement parlant à créer des exemples novateurs. Restez classique.

$$Cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)$$

$$\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$$

$$\left|\begin{array}{l}\textit{Du Théorème de pythagore}\\ \cos^2(a)+\sin^2(a)=1\end{array}\right.\ \textit{alors}\begin{cases}\sin^2(a)=1-\cos^2(a)\\ \sin^2(a)=1-\sin^2(a)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}Cos(2a)=2\cos^2(a)-1\\ Cos(2a)=1-2\sin^2(a)\end{cases}$$

$$\tan(2a)=\frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

$$\frac{1-\tan^2(a)}{1+\tan^2(a)}=\cos^2(a)-\sin^2(a)=\cos(2a)$$

$$\begin{cases}\cos^2\left(\frac{b}{2}\right)=\dfrac{\cos\left(2\left(\frac{b}{2}\right)\right)-1}{2}\\ \sin^2\left(\frac{b}{2}\right)=\dfrac{1-\cos\left(2\left(\frac{b}{2}\right)\right)}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos^2\left(\frac{b}{2}\right)=\dfrac{\cos(b)-1}{2}\\ \sin^2\left(\frac{b}{2}\right)=\dfrac{1-\cos(b)}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(\frac{b}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{\cos(b)-1}{2}}\\ \sin\left(\frac{b}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{1-\cos(b)}{2}}\end{cases}$$

b) duplication de trois angles identiques

Formule historique

$$\begin{cases}\cos(3a) = 4\cos^3(a) - 3\cos(a)\\ \cos(3a) = \cos(a)\cos(2a)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\cos(3a) &=& \quad \cos(a)\cos(2a)\\
\Leftrightarrow\ &\cos(3a) &=& \quad \cos(a)(\cos^2(a) - \sin^2(a))\\
\Leftrightarrow\ &\cos(3a) &=& \quad \cos a(\cos^2(a) - 2\sin^2(a)\sin(a)\\
\Leftrightarrow\ &\cos(3a) &=& \quad \cos^3(a) - 3\sin^2(a)\cos(a)\\
\Leftrightarrow\ &\cos(3a) &=& \quad \cos^3(a) - 3\cos(a)(1 - \cos^2(a))\\
\Leftrightarrow\ &\cos(3a) &=& \quad \cos^3(a) - 3\cos(a) - 3\cos^3(a)\\
\Leftrightarrow\ &\cos(3a) &=& \quad 4\cos^3(a) - 3\cos(a)
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}\sin(3a) = \sin(2a + a)\\ \cos^2(a) = 1 - \sin^2(a)\\ \cos 2(a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\sin(3a) = \sin(2a + a)\\
\Leftrightarrow\ &\sin(3a) = \sin(2a)\cos(a) + \cos(2a)\sin(a)\\
\Leftrightarrow\ &\sin(3a) = 2\sin(a)\cos(a)\cos(a) - (\cos^2(a) - \sin^2(a))\sin(a)\\
\Leftrightarrow\ &\sin(3a) = 2\sin(a)\cos^2(a) + (\sin(a)\cos^2(a) - \sin^3(a)\\
\Leftrightarrow\ &\sin(3a) = 2\sin(a)\cos^2(a) + (\sin(a)\cos^2(a) - \sin^3(a)\\
\Leftrightarrow\ &\sin(3a) = 3\sin(a)\cos^2(a) - \sin^3(a)\\
\Leftrightarrow\ &\sin(3a) = 3\sin(a)(1 - \sin^2(a)) - \sin^3(a)\\
\Leftrightarrow\ &\sin(3a) = 3\sin(a) - 3\sin^3(a)) - \sin^3(a)\\
\Leftrightarrow\ &\sin(3a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \tan(3a) = \frac{3\cos^2(a)\sin(a) - \sin^3(a)}{\cos^3(a) - 3\cos(a)\sin^2(a)} \Leftrightarrow \tan(3a) = \frac{\dfrac{3\cos^2(a)\sin(a) - \sin^3(a)}{\cos^3(a)}}{\dfrac{\cos^3(a) - 3\cos(a)\sin^2(a)}{\cos^3(a)}}$$

$$\Leftrightarrow \tan(3a) = \frac{\dfrac{3\sin(a)}{\cos(a)} - \dfrac{\sin^3(a)}{\cos^3(a)}}{1 - \dfrac{3\sin^2(a)}{\cos^2(a)}} \Leftrightarrow \tan(3a) = \frac{3\tan(a) - \tan^3(a)}{1 - 3\tan^2(a)}$$

Formule de Moivre dans $\mathbb{C}$ (Identité remarquable nième) : $(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$

$$\begin{cases}\cos(3a) = \cos^3(a) - 3\sin^2(a)\cos(a)\\ \sin(3\alpha) = 3\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) - 4\sin^3(\alpha)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\cos(3a)\\ \sin(3\alpha)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos^3(a) - 3\sin^2(a)\cos(a)\\ 3\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) - 4\sin^3(\alpha)\end{pmatrix}$$

2.6) Multiplication d'angles :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \cos(b+a) & = & \cos(b).\cos(a)-\sin(b).\sin(a) \\ \cos(b-a) & = & \cos(b).\cos(a)+\sin(b).\sin(a) \\ \hline \cos(b+a)+\cos(b-a) & = & 2\cos(b).\cos(a) \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos(b+a)+\cos(b-a)=\cos(b).\cos(a)$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \cos(b+a) & = & \cos(b).\cos(a)-\sin(b).\sin(a) \\ \cos(b-a) & = & \cos(b).\cos(a)+\sin(b).\sin(a) \\ \hline \cos(b+a)-\cos(b-a) & = & -2\sin(b).\sin(a) \end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\cos(b+a)-\cos(b-a)=\sin(b).\sin(a)$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} Sin(b+a) & = & \sin(b).\cos(a)+\cos(b).\sin(a) \\ Sin(b-a) & = & \sin(b).\cos(a)-\cos(b).\sin(a) \\ \hline \sin(b+a)+\sin(b-a) & = & 2\sin(b).\cos(a) \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin(b+a)+\sin(b-a)=\sin(b).\cos(a)$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} Sin(b+a) & = & \sin(b).\cos(a)+\cos(b).\sin(a) \\ Sin(b-a) & = & \sin(b).\cos(a)-\cos(b).\sin(a) \\ \hline \sin(b+a)-\sin(b-a) & = & 2\cos(b).\sin(a) \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin(b+a)-\sin(b-a)=2\cos(a).\sin(b)$$

$$\begin{array}{l} \cos(b+a)+\cos(b-a)=2\cos(b).\cos(a) \\ \cos(b+a)-\cos(b-a)=2\sin(b).\sin(a) \\ \sin(b+a)+\sin(b-a)=2\sin(b).\cos(a) \\ \sin(b+a)-\sin(b-a)=-2\cos(b).\sin(a) \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \frac{1}{2}\cos(b+a)+\cos(b-a)=\cos(b).\cos(a) \\ \frac{1}{2}\cos(b+a)-\cos(b-a)=\sin(b).\sin(a) \\ \frac{1}{2}\sin(b+a)+\sin(b-a)=\sin(b).\cos(a) \\ \frac{1}{2}\sin(b+a)-\sin(b-a)=\cos(b).\sin(a) \end{array}$$

2.6) transformation de sommes d'angle en produit d'angle

Il vient qu'en posant $\begin{cases} p = b + a \\ q = b - a \end{cases}$ on ait : $\begin{cases} p + q = b + a + b - a = 2b \\ p - q = b + a - (b - a) = 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{p+q}{2} = b \\ \dfrac{p-q}{2} = a \end{cases}$

Par suite on a :

$$\cos(b+a) + \cos(b-a) = 2\cos(b).\cos(a)$$

$$\Leftrightarrow \cos(p) + \cos(q) = 2.\cos(\frac{p+q}{2}).\cos(\frac{p-q}{2})$$

$$\cos(b+a) - \cos(b-a) = 2\sin(b).\sin(a)$$

$$\Leftrightarrow \cos(p) - \cos(q) = -2\sin(\frac{p+q}{2}).\sin(\frac{p-q}{2})$$

$$\sin(a+b) + \sin(a+b) = \sin(a).\cos(b)$$

$$\Leftrightarrow \sin(p) + \sin(q) = \sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$$

$$\sin(a+b) - \sin(a+b) = -2\cos(a).\sin(b)$$

$$\Leftrightarrow \sin(p) - \sin(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$$

$$\cos(p) + \cos(q) = 2.\cos(\frac{p+q}{2}).\cos(\frac{p-q}{2})$$
$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin(\frac{p+q}{2}).\sin(\frac{p-q}{2})$$
$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p+q}{2})$$
$$\sin(p) - \sin(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$$

3) Identités remarquables trigonométriques

a) Identités remarquables au carré

$$\Leftrightarrow P^2(\alpha)=\left(\cos(\alpha)+\sin(\alpha)\right)^2=\cos^2(\alpha)+2\cos(\alpha)\sin(\alpha)+\sin^2(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)\\ 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \sin(2a)\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow P^2(\alpha)=\left(\cos(\alpha)-\sin(\alpha)\right)^2=\cos^2(\alpha)+2\cos(\alpha)\sin(\alpha)+\sin^2(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)\\ -2\cos(\alpha)\sin(\alpha)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -\sin(2a)\end{pmatrix}$$

$$P_2(\alpha)=\left[\cos(\alpha)-\sin(\alpha)\right]\left[\cos(\alpha)+\sin(\alpha)\right]=\cos^2(\alpha)-\sin^2(x)=Cos(2a)$$

b) Identités remarquables au cube (?)

$$\sin^3(\alpha)=\sin^2(\alpha)\cos(\alpha)=(1-\cos^2(\alpha))(\sin(\alpha)=\sin(\alpha)-\sin(\alpha)\cos^2(\alpha)$$
$$\cos^3(\alpha)=\cos^2(\alpha)\cos(\alpha)=(1-\sin^2(\alpha))\cos(\alpha)=\cos(\alpha)-\sin^2(\alpha)\cos(\alpha)$$

Version 1 :

$$\Leftrightarrow P^3(x)=\sin(\alpha)-\sin(\alpha)\cos^2(\alpha)+3\sin^2(\alpha)\cos(\alpha)+3\sin(\alpha)\cos^2(\alpha)+\cos(\alpha)-\sin^2(\alpha)\cos(\alpha)$$
$$\Leftrightarrow P^3(x)=\sin(\alpha)+\cos(\alpha)+2\left[\sin^2(\alpha)\cos(\alpha)+\sin(\alpha)\cos^2(\alpha)\right]$$
$$\Leftrightarrow P^3(x)=\sin(\alpha)+\cos(\alpha)+2\left[\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}\cos(\alpha)+\sin(\alpha)\frac{\cos(2\alpha)-1}{2}\right]$$

Version 2 :

$$P^3(x)=\left[\sin(\alpha)+\cos(\alpha)\right]^3$$
$$\Leftrightarrow P^3(x)=\sin^3(\alpha)+3\sin^2(\alpha)\cos(\alpha)+3\sin(\alpha)\cos^2(\alpha)+\cos^3(\alpha)$$
$$\Leftrightarrow P^3(x)=\sin^3(\alpha)+3(1-\cos^2)(\alpha)\cos(\alpha)+3\sin(\alpha)(1-\sin^2)-\cos^3(\alpha)$$
$$\Leftrightarrow P^3(x)=\sin^3(\alpha)+3\cos(\alpha)-3\cos^3(\alpha)+3\sin(\alpha)-3\sin^3(\alpha)-\cos^3(\alpha)$$
$$\Leftrightarrow P^3(x)=3\cos(\alpha)-2\cos^3(\alpha)+3\sin(\alpha)-2\sin^3(\alpha)$$
$$\Leftrightarrow P^3(x)=3\left[\cos(\alpha)+\sin(\alpha)\right]-2\left[\sin^3(\alpha)+\cos^3(\alpha)\right]$$

Remarque :

$$2\left[\sin^3(\alpha)+\cos^3(\alpha)\right]=2\left[\left[\cos(\alpha)-\sin^2(\alpha)\cos(\alpha)\right]+\left[\sin(\alpha)-\sin(\alpha)\cos^2(\alpha)\right]\right]$$

Non vérifié numériquement

4) Equations trigonométriques

A) Equation trigonométrique usuelles

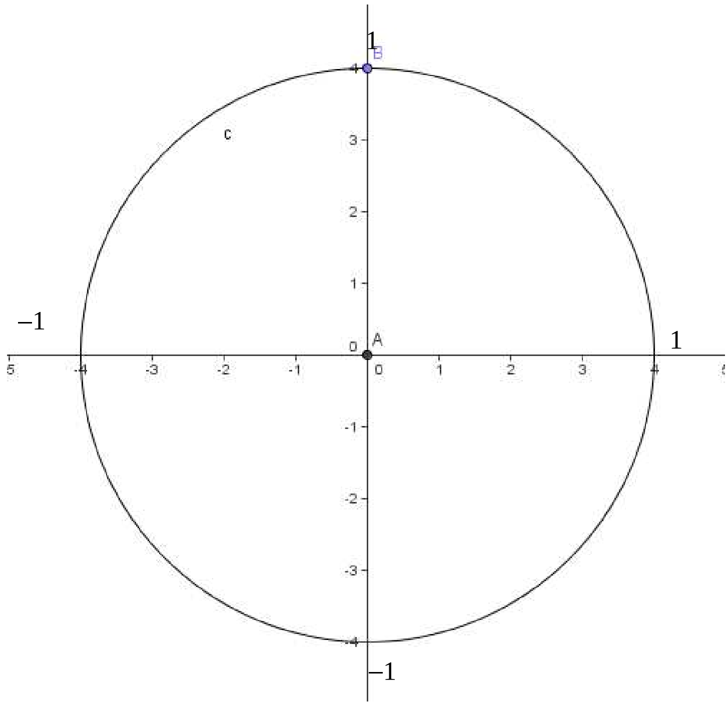
L'équation trigonométrique est la détermination d'une partie du pourtour du cercle, soit un arc, ou plusieurs arcs. Par conséquent, l'arc étant inscrit dans un cercle de rayon r, et de norme vectorielle trigonométrique 1, il vient que l'équation existe si et seulement si il appartient à $[0;2\pi]$; ou en mesure principale$[\pi;-\pi]$. Soit sur les axes trigonométrique

On rappelle que :

$$\begin{cases} \sin(0)=\sin(0\pi)=0 \\ \sin(90)=\sin(\frac{\pi}{2})=1 \\ \sin(180)=\sin(\pi)=0 \\ \sin(270)=\sin(\frac{3\pi}{2})=\sin(-\frac{\pi}{2})=-1 \\ \sin(380)=\sin\left(2\pi\right)=\sin(0)=1 \end{cases} ; \begin{cases} \cos(0)=\cos(0)=1 \\ \cos(90)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \\ \cos(180)=\cos(\pi)=-1 \\ \cos(270)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\cos(-\frac{\pi}{2})=0 \\ \cos(380)=\cos\left(2\pi\right)=\cos(0)=1 \end{cases}$$

$$\text{Sur l'axe des sinus : } \begin{cases} y=\sin(90)=\sin(\frac{\pi}{2})=1 \\ y=\sin(270)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1 \end{cases}$$

$$\text{Sur l'axe des cosinus : } \begin{cases} x=\cos(0)=\cos(0)=1 \\ x=\cos(180)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1 \end{cases}$$



Des symétries trigonométriques et des lettres grecs :
Lettre grec : $\varphi = phi$ minuscule $= fi$; $\alpha =$ alpha minuscule=alfa
Du cercle trigonométrique de rayon R, il vient que toutes les valeurs sont comprises
Pour les axes trigonométrique entre $[-1;1]$
Pour l'arc trigonométrique $[-\pi;\pi]$ où $\pi = 180° = 3{,}14$

Des égalités :

$$\begin{cases}\cos(\alpha) = \cos(x) \Leftrightarrow \alpha = x \\ \sin(\alpha) = \sin(x) \Leftrightarrow \alpha = x \\ \tan(\alpha) = \tan(x) \Leftrightarrow \alpha = x\end{cases}$$

Et des symétries trigonométriques

$$\begin{matrix}\cos(x) = \cos(\alpha) \\ \cos(-x) = \cos(\alpha)\end{matrix} \quad \begin{cases}\sin(\pi - x) = \sin(\alpha) \\ \sin(x) = \sin(\alpha)\end{cases}$$

Il vient que l'arc (en degré ou en radian) dont le cosinus ou dont le sinus ou dont la tangente de la valeur métrique sur les axes trigonométrique a pour valeur :

$$\cos(\varphi) = a \Leftrightarrow \begin{cases} arc\cos(a) = \varphi + 2k\pi \\ arc\cos(a) = -\varphi + 2k\pi\end{cases}$$

$$\sin(\varphi) = b \Leftrightarrow \begin{cases} arc\cos(b) = \varphi + 2k\pi \\ arc\cos(b) = (\pi - \varphi) + 2k\pi\end{cases}$$

$$\tan(\varphi) = c \Leftrightarrow arc\tan(c) = \varphi + 2k\pi$$

$$\begin{cases}\cos(x) = a \\ \sin(x) = b \\ \tan(x) = c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\begin{cases}a = \cos(\alpha) \\ \cos(x) = \cos(\alpha)\end{cases} \\ \begin{cases}b = \cos(\alpha) \\ \sin(x) = \sin(\alpha)\end{cases} \\ \begin{cases}c = \tan(\alpha) \\ \tan(x) = \tan(\alpha)\end{cases}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\begin{pmatrix}x \\ x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha + 2k\pi \\ -\alpha + 2k\pi\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}\alpha \\ \alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha + 2k\pi \\ (\pi - \alpha) + 2k\pi\end{pmatrix} \\ \alpha = \alpha + \pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\begin{pmatrix}x \\ x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}arc\cos(a) \\ arc\cos(a)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha + 2k\pi \\ -\alpha + 2k\pi\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}x \\ x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}arc\sin(a) \\ arc\sin(a)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha + 2k\pi \\ (\pi - \alpha) + 2k\pi\end{pmatrix} \\ x = arc\tan(x) = \alpha + k\pi\end{cases}$$

Arc cos est lu "arc cos" s prononcé, de arc cosinus qui signifie l'arc dont le cosinus est : …..
Arc sin est lu " arc sin" de arc sinus qui signifie l'arc dont le sinus est : ……
Arc tan est lu "arc tan" de arc tangente qui signifie l'arc dont la tangente est : ……

Ainsi des valeurs remarquables trigonométriques

$$\left(\begin{array}{cc}
\alpha=\pi-\beta & \alpha=\beta \\
\begin{pmatrix}
\alpha & \cos(\alpha)= & \sin(\alpha)= & \tan(\alpha)= \\
\left(\frac{2\pi}{3}\right) & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \\
\left(\frac{3\pi}{4}\right) & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\
\left(\frac{5\pi}{6}\right) & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}
\end{pmatrix} &
\begin{pmatrix}
\alpha & \cos(\alpha)= & \sin(\alpha)= & \tan(\alpha)= \\
\left(\frac{\pi}{6}\right) & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\
\left(\frac{\pi}{4}\right) & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\
\left(\frac{\pi}{3}\right) & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \sqrt{3}
\end{pmatrix} \\
\alpha=\pi+\beta & \alpha=-\beta \\
\begin{pmatrix}
\alpha & \cos(\alpha)= & \sin(\alpha)= & \tan(\alpha)= \\
\left(-\frac{2\pi}{3}\right) & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \\
\left(-\frac{3\pi}{4}\right) & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\
\left(-\frac{5\pi}{6}\right) & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}
\end{pmatrix} &
\begin{pmatrix}
\alpha & \cos(\alpha)= & \sin(\alpha)= & \tan(\alpha)= \\
\left(-\frac{\pi}{6}\right) & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\
\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\
\left(-\frac{\pi}{3}\right) & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \sqrt{3}
\end{pmatrix}
\end{array}\right)$$

$$\begin{cases}
\cos(0)=\cos(0)=1 \\
\cos(90)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \\
\cos(180)=\cos(\pi)=-1 \\
\cos(270)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\cos(-\frac{\pi}{2})=0 \\
\cos(380)=\cos\left(2\pi\right)=1
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\sin(0)=\sin(0\pi)=0 \\
\sin(90)=\sin(\frac{\pi}{2})=1 \\
\sin(180)=\sin(\pi)=0 \\
\sin(270)=\sin(\frac{3\pi}{2})=\sin(-\frac{\pi}{2})=-1 \\
\sin(360)=\sin(2\pi)=\sin(0)=0
\end{cases}$$

Il vient que :

$$\begin{cases}
\begin{cases}
\cos(\alpha)=1 \\
\sin(\alpha)=1 \\
\tan(\alpha)=1
\end{cases} \\
\begin{cases}
\cos(\alpha)=0 \\
\sin(\alpha)=0 \\
\tan(\alpha)=0
\end{cases}
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
\begin{cases}
Arc\cos(1)=(0+2k\pi\ ;-0+2k\pi)=0 \\
Arc\sin(1)=(\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ;-\frac{\pi}{2}+2k\pi) \\
Arc\tan(1)=0\ Puisque\ \frac{\sin(0)}{\cos(0)}=\frac{0}{1}=0
\end{cases} \\
\begin{cases}
Arc\ \cos(0)=0 \\
Arc\ \sin(\alpha)=0 \\
Arc\tan(\alpha)=0
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
Arc\ \cos(0)=(\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ;-\frac{\pi}{2}+2k\pi) \\
Arc\ \sin(0)=(0+2k\pi\ ;-0+2k\pi)=0 \\
Arc\tan(0)=\nexists
\end{cases}
\end{cases}$$

Exemple numérique :

Valeur pour 30 °

$$\begin{cases}\cos(30°)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos(-30)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases};\begin{cases}\sin(30°)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\\ \sin(180-30°)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\end{cases};\tan(30°)=\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}.\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{cases}\cos(45°)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos(-45°)=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases};\begin{cases}\sin(45°)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin(-45°)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases};\tan(30°)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{2}{\sqrt{2}}=1$$

$$\begin{cases}\cos(60°)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\\ \cos(-60°)=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\end{cases};\begin{cases}\sin(60°)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin(-60°)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases};\tan(30°)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.2=\sqrt{3}$$

En résumant dans un tableau, Il vient que sachant qu'un tour de cercle fait : $2k\pi$:

$lettre\ grec\ \alpha = alpha\ lu\ alfa\,;\beta = béta\,;\varphi = phi\ lu\ fi;\pi = pi = 3{,}141\,592$

Alors :

$$\begin{cases}\cos(\varphi)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi\\ \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi\end{cases}\\ \cos(\varphi)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi\\ \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi\end{cases}\\ \cos(\varphi)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\arccos\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi\\ \arccos\left(\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi\end{cases}\end{cases}\quad\begin{cases}\sin(\varphi)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi\\ \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi\end{cases}\\ \sin(\varphi)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi\\ \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi\end{cases}\\ \sin(\varphi)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi\\ \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi\end{cases}\end{cases}$$

Soit en résumant dans un tableau ou dans une matrice :

Bon, là, revenons à mes 40 ans, euuh, je suis au stylo, c'est de plus en plus rare, mais je cherche la mise en forme en forme qui minimise l'espace. Je ne bloque pas, mais je teste.

Remarque : on peut réorganiser les valeurs remarquables sous forme matricielle :

$$(\cos \quad \sin \quad \tan)\circ\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\\left(\frac{3\pi}{4}\right)\\\left(\frac{5\pi}{6}\right)\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\left(\frac{\pi}{6}\right)\\\left(\frac{\pi}{4}\right)\\\left(\frac{\pi}{3}\right)\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\\\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\\\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\\\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\\left(-\frac{\pi}{3}\right)\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1\\\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \sqrt{3}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3}\\-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1\\\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3}\\-\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1\\-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1\\-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \sqrt{3}\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$(\cos \quad \sin \quad \tan)\circ\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(\frac{\pi}{6}\right)\\\left(\frac{\pi}{4}\right)\\\left(\frac{\pi}{3}\right)\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\\left(\frac{3\pi}{4}\right)\\\left(\frac{5\pi}{6}\right)\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\\\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\\\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\\\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\\left(-\frac{\pi}{3}\right)\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1\\\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \sqrt{3}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3}\\-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1\\\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3}\\-\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1\\-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1\\\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \sqrt{3}\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

A Revoir ; y 'a des erreurs dans la deuxième tranche

$$Arc\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\\\sin\end{pmatrix}\\\tan\end{pmatrix}^t\circ\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3}\\\frac{\sqrt{2}}{2} & 1\\\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3}\\-\frac{\sqrt{2}}{2} & 1\\-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}\left(\frac{\pi}{6};-\frac{\pi}{6}\right) & \left(\frac{\pi}{3};\pi-\frac{\pi}{3}\right)\\\left(\frac{\pi}{4};-\frac{\pi}{4}\right) & \left(\frac{\pi}{4};\pi-\frac{\pi}{4}\right)\\\left(\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{3}\right) & \left(\frac{\pi}{6};\pi-\frac{\pi}{6}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\pi}{3}\\\frac{\pi}{4}\\\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}\right);\left(\begin{pmatrix}\left(\frac{5\pi}{6};-\frac{5\pi}{6}\right) & \left(-\frac{\pi}{6};\pi+\frac{\pi}{6}\right)\\\left(\frac{3\pi}{4};-\frac{3\pi}{4}\right) & \left(-\frac{5\pi}{4};\pi+\frac{\pi}{4}\right)\\\left(\frac{2\pi}{3};-\frac{2\pi}{3}\right) & \left(-\frac{5\pi}{6};\pi+\frac{\pi}{3}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{\pi}{3}\\-\frac{\pi}{4}\\-\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}\right)$$

$$\Leftrightarrow Arc\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\\\sin\end{pmatrix}\\\tan\end{pmatrix}^t\circ\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3}\\\frac{\sqrt{2}}{2} & 1\\\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3}\\-\frac{\sqrt{2}}{2} & 1\\-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}\left(\frac{\pi}{6};-\frac{\pi}{6}\right) & \left(\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right)\\\left(\frac{\pi}{4};-\frac{\pi}{4}\right) & \left(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)\\\left(\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{3}\right) & \left(\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\pi}{3}\\\frac{\pi}{4}\\\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}\right);\left(\begin{pmatrix}\left(\frac{5\pi}{6};-\frac{5\pi}{6}\right) & \left(-\frac{\pi}{6};\frac{7\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}\right)\\\left(\frac{3\pi}{4};-\frac{3\pi}{4}\right) & \left(-\frac{5\pi}{4};\frac{5\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}\right)\\\left(\frac{2\pi}{3};-\frac{2\pi}{3}\right) & \left(-\frac{5\pi}{6};\frac{4\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{\pi}{3}\\-\frac{\pi}{4}\\-\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}\right)$$

B) Equations Trigonométrique P(x) = a cos(x) + b sin (x)

Forme canonique de $P(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$

La fonction $P(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ est définie sans des nombres réels $\mathbb{R}$, sa période est $T = 2\pi$. On considère dans le plan métrique rapporté à une base orthonormé $(\vec{i};\vec{j})$, le point $P(a;b)$ de cordonnée $(a;b)$ tel que

$$\overrightarrow{OP} = a\vec{i} + b\vec{j}$$

Qui implique que la distance vectorielle, appelée norme du vecteur, soit :

$$\left\|\overrightarrow{OP}\right\| = \sqrt{a^2 + b^2} = r \text{ (du théorème de Pytagore)}$$

De même que l'angle de deux demi droite (Ox,, OP), normé par ses vecteur $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{OP}$ forme un angle α, noté :

$$angle\,vectoriel\,(Ox;OP) = (\widehat{\overrightarrow{Ox};\overrightarrow{OP}}) = \alpha$$

D'où

$$\begin{cases} a = r\cos(\alpha) \\ b = r\sin(\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha) \\ r\sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Ors des formules d'additions d'angles :

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \Leftrightarrow \cos(a-b) = \begin{pmatrix} \cos(a)\cos(b) \\ \sin(a)\sin(b) \end{pmatrix}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{cases} a\cos(x) = r\cos(\alpha)\cos(x) \\ b\sin(x) = r\sin(\alpha)\sin(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a\cos(x) \\ b\sin(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha)\cos(x) \\ r\sin(\alpha)\sin(x) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a\cos(x) \\ b\sin(x) \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(x) \\ \sin(\alpha)\sin(x) \end{pmatrix}$$

Et par suite :

$$a\cos(x) + b\sin(x) = r\cos(\alpha)\cos(x) + r\sin(\alpha)\sin(x)$$
$$\Leftrightarrow a\cos(x) + b\sin(x) = r\left[\cos(x)\cos(\alpha) + \sin(x)\sin(\alpha)\right]$$

Et comme :

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

Alors :

$$\left[\cos(x)\cos(\alpha) + \sin(x)\sin(\alpha)\right] = \cos(x-\alpha)$$

Et par conséquent :

$$a\cos(x) + b\sin(x) = r\cos(x-\alpha)$$

Résolution de l'équation $a\cos(x)+b\sin(x)=c$

L'équation :

$$a\cos(x)+b\sin(x)=c$$

En posant :

$$a=r\cos(\alpha)$$
$$b=r\sin(\alpha)$$

Devient :

$$a\cos(x)=r\cos(\alpha)\cos(x)$$
$$b\sin(x)=r\sin(\alpha)\sin(x)$$

A l'aide des formules d'addition :

$$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$$

Soit, s'écrit finalement :

$$\begin{aligned}
&a\cos(x)+b\sin(x)=r\cos(\alpha)\cos(x)+r\sin(\alpha)\sin(x)\\
&\Leftrightarrow \cos(x)a+\sin(x)b=r\left[\cos(x)\cos(\alpha)+\sin(x)\sin(\alpha)\right]\\
&\Leftrightarrow \cos(x)a+\sin(x)b=r\cos(x-\alpha)\\
&\Leftrightarrow a\cos(x)+b\sin(x)=r\cos(x-\alpha)
\end{aligned}$$

On a donc le système suivant :

$$\begin{cases} a\cos(x)+b\sin(x)=r\cos(x-\alpha) \\ a\cos(x)+b\sin(x)=c \end{cases} \Leftrightarrow r\cos(x-\alpha)=c \Leftrightarrow \cos(x-\alpha)=\frac{c}{r}$$

des fonctions trigonométriques usuelles, on sait que :

$$\begin{cases} \cos(\alpha)=\cos(\alpha+2k\pi)=a \\ \cos(-\alpha)=\cos(-\alpha+2k\pi)=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\alpha)=\cos(-\alpha) \\ \cos(\alpha+2k\pi)=\cos(-\alpha+2k\pi) \end{cases}$$

D'où on a crée sa fonction réciproque, tel que

$$\cos(arc\cos(a))=\left(\cos(\alpha+2k\pi);\cos(-\alpha+2k\pi)\right) \Leftrightarrow arc\cos(a)=(\alpha+2k\pi;-\alpha+2k\pi)$$

Soit à l'aide de sa fonction réciproque, on peut écrire :

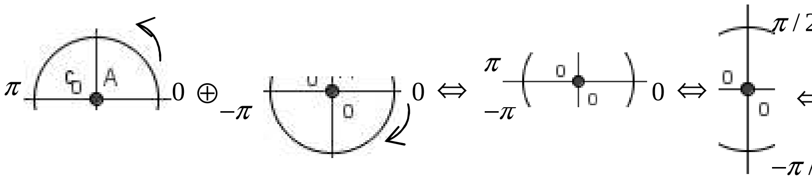
$$\begin{cases} arc\cos(x-\alpha)=(x-\alpha) \\ \cos(x-\alpha)=\dfrac{c}{r} \Rightarrow \arccos(\cos(x-\alpha))=\mathrm{arc}\cos\left(\dfrac{c}{r}\right) \Leftrightarrow (x-\alpha)=\mathrm{arc}\cos\left(\dfrac{c}{r}\right) \end{cases}$$

En Posant $X=x-\alpha$, on a :

$$\begin{cases} \cos(X)=a \\ \cos(\beta)=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} arc\cos(a)=(\beta;-\beta)\equiv[2\pi] \\ arc\cos(\cos(X))=X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=\beta+2k\pi \\ X=-\beta+2k\pi \end{cases}$$

Puisque l'on sait que la fonction trigonométrique usuelle $f(x)=\cos(x)$ est définie sur les intervalles suivants :

$x\in[0;2\pi]$, en radian, soit par restriction $[-\pi;\pi]$ qui représentant la mesure principale ou directe tel que par abus de langage $[\pi;-\pi]=[0;\pi]\oplus[0;-\pi]$ sur l'axe circulaire (= sur le cercle) et l'axe des cosinus, où dans leur tête ils expriment que : "$[0;\pi]$ $\bigcup$ $[-\pi;0]\Leftrightarrow[\pi;-\pi]$"



$$\Leftrightarrow\begin{cases} f_{X'X}(0)=f_{X'X}(2\pi)=f_{Y'Y}(\pi/2)=1 \\ f_{X'X}(\pi)=f_{X'X}(-\pi)=f_{Y'Y}(-\pi/2)=-1 \end{cases}$$

Bien en fait : $[0;\pi]\cup[0;-\pi;]=[0;\pm\pi]$ On aurait pu encore écrire :

$[\pi;-\pi]=[0;\pi]\hat{+}[0;-\pi;]=[0;\pi]\hat{\cup}[0;-\pi;]$

Il vient que sa fonction elle est définie dans l'intervalle

$f(x)\in[-1;1]$, Puisque $\begin{cases} \cos(\pi)=\cos(-\pi)-1 \\ \cos(0)=\cos(-0)=\cos(2\pi)=1 \end{cases}$

Sur l'axe des abscisses trigonométriques soit sur l'axe des cosinus.

Et comme

$$\begin{cases} \cos(x-\alpha)=\dfrac{c}{r} \\ X=x-\alpha \end{cases}\Leftrightarrow \cos(X)=\frac{c}{r}\Leftrightarrow X=\arccos\left(\frac{c}{r}\right)=(\beta;-\beta)\equiv[2\pi]$$

Soit que $-\pi<\arccos\left(\dfrac{c}{r}\right)<\pi$, soit encore $-1<\dfrac{c}{r}<1$, Puisque $-1<X<1$

Alors cet encadrement nous permet de classifier les cas :

Si $\begin{cases} \dfrac{c}{r}>1 \\ \dfrac{c}{r}<-1\ sachant-2<-1 \end{cases}$, alors il n'existe pas de solution dans le cercle trigonométrique

Si $\begin{cases} \dfrac{c}{r}<1 \\ \dfrac{c}{r}>-1\ sachant-1>-2 \end{cases}$, alors l'équation a des solutions dans le cercle trigonométrique

tel que

$$arc\cos(\cos(x-\alpha))=\arccos\left(\frac{c}{r}\right)\Leftrightarrow(x-\alpha))=\arccos\left(\frac{c}{r}\right)\Leftrightarrow\begin{cases} x-\alpha=\beta+2k\pi \\ x-\alpha=-\beta+2k\pi \end{cases}\ où\ \ \beta=\text{arc}\cos\left(\frac{c}{r}\right)$$

Et finalement, on a :

$$\begin{cases} x=\alpha+\beta+2k\pi \\ x=\alpha-\beta+2k\pi \end{cases}\ où\ \ \beta=\text{arc}\cos\left(\frac{c}{r}\right)$$

Remarque :

De :

$$a = r\cos(x)$$
$$b = r\sin(x)$$

On peut écrire :

$$a^2 + b^2 = r^2\cos^2(\alpha) + r^2\sin^2(\alpha)$$
$$a^2 + b^2 = r^2\left[\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)\right]$$

Du théorème de Pythagore, il vient que dans le cercle trigonométrique :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = R^2 \Leftrightarrow [\cos(x)]^2 + [\sin(x)]^2 = R^2 \Leftrightarrow \cos^2(x) + \sin^2(x) = R^2 \\ \left\|\vec{R}\right\| = \left\|\overline{OR}\right\| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{R^2} = R = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$$

Soit que :

$$a^2 + b^2 = r^2\left[\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)\right]$$
$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = r^2(1)$$
$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = r^2$$

Par conséquent :

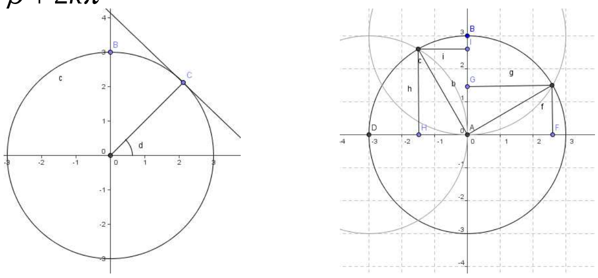
$$a^2 + b^2 = r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{a^2+b^2}$$

Et :

$$arc\cos(\cos(x-\alpha)) = \operatorname{arc}\cos\left(\frac{c}{r}\right) \Leftrightarrow (x-\alpha)) = \operatorname{arc}\cos\left(\frac{c}{r}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x-\alpha = \beta + 2k\pi \\ x-\alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases} \text{ où } \beta = \operatorname{arc}\cos\left(\frac{c}{r}\right)$$

En résumé :

$$a\cos(x) + b\sin(x) = c$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos(x-\alpha) = \dfrac{c}{r} \Leftrightarrow (x-\alpha) = \operatorname{arc}\cos\left(\dfrac{c}{r}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x-\alpha = \beta + 2k\pi \\ x-\alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos(x-\alpha) = \dfrac{c}{r} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta + 2k\pi \\ x = \alpha - \beta + 2k\pi \end{cases} \end{cases}$$



Equation de la normale à OM, rotation des angles

Exemple numérique 01

Montrer que pour tout x :

$$\sin(x)+\cos(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

En déduire le maximum de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin(x)+\cos(x)$ et préciser pour quelle valeurs de x il est atteint

Résolution intuitive du livre

Des formules d'addtions :

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos(x)\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin(x)\cos\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos(x)+\sin(x)\right]$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\left[\cos(x)+\sin(x)\right]$$

Ors

$$\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

Donc :

$$\left[\cos(x)+\sin(x)\right]=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

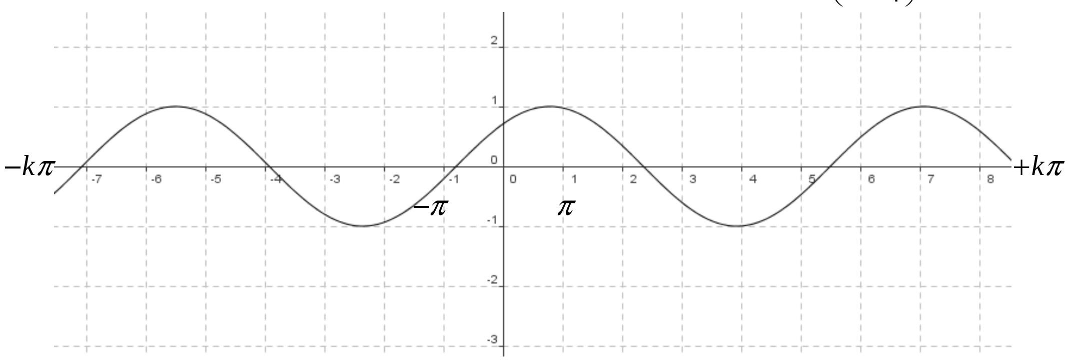
La fonctions usuelle sin (X) est définie dans l'intervalle $I=[1;-1]$

Par conséquent, la valeur maximale est 1 tel que

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x+2k\pi$$

La valeur maximal de sin(x)+cos(x) est donc $\sqrt{2}$, elle atteinte lorsque : $x=\frac{\pi}{4}$

Graphe du polynôme P(x) tel que $y=P(x)\Leftrightarrow P(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$



Ma résolution systémique :

Du formulaire

$$a\cos(x)+b\sin(x)=c$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} r=\sqrt{a^2+b^2} \\ \cos(x-\alpha)=\dfrac{c}{r} \\ \cos(x-\alpha)=\cos(x)\cos(\alpha)+\sin(x)\sin(\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow (x-\alpha)=\arccos\left(\frac{c}{r}\right)\Leftrightarrow\begin{cases} x-\alpha=\beta+2k\pi \\ x-\alpha=-\beta+2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} r=\sqrt{a^2+b^2} \\ \cos(x-\alpha)=\dfrac{c}{r}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\alpha+\beta+2k\pi \\ x=\alpha-\beta+2k\pi \end{cases} \end{cases}$$

Et de l'équation :

$$\sin(x)+\cos(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\begin{cases} a=1;b=1\Leftrightarrow r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2} \\ a\cos(x)+b\sin(x)=\dfrac{c}{r} \\ c=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

Il vient que :

$$\begin{cases} a=1;b=1\Leftrightarrow r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2} \\ a\cos(x)+b\sin(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\cos(x-\alpha)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\cos(A)=\sin(B) \\ a\cos(x)+b\sin(x)=\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Ors des lignes trigonométrique symétrique, on sait que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\sin(A)$$

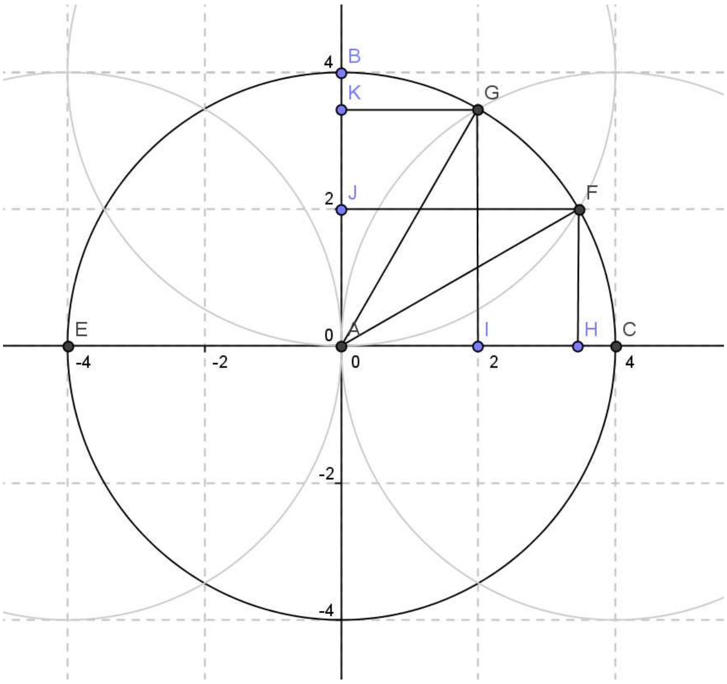
$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Donc

$$\cos(x-\alpha)=\cos\left(\frac{2\pi}{4}-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)\Leftrightarrow\cos(x-\alpha)=\cos\left(-x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} (x-\alpha)=\left(-x+\dfrac{\pi}{4}\right)+2k\pi \\ (x-\alpha)=-\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+2k\pi \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \Leftrightarrow 2x-\alpha=\dfrac{\pi}{4} \\ -\alpha=-\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow\alpha=\dfrac{\pi}{4} \end{cases}\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}...\frac{\pi}{4}+2k\pi$$

exemple numérique :



$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{12}\right)=2\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}=0,866666$$

et

$$\Leftrightarrow \cos(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow arc\cos(\cos x)=arc\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\Leftrightarrow x=\cos\left(\frac{\pi}{4};-\frac{\pi}{4}\right)$$

Exemple numérique 02 :

C) Equation trigonométrique du second degré

Principe général :

$$\begin{cases}\cos^2(\alpha)+\cos(\alpha)=c_1\\ \sin^2(\alpha)+\sin(\alpha)=c_2\\ \tan^2(\alpha)+\tan(\alpha)=c_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}f_1{}^2(\alpha)+f_1(\alpha)=c_1\\ f_2{}^2(\alpha)+f_2(\alpha)=c_2\\ f_3{}^2(\alpha)+f_3(\alpha)=c_3\end{cases} \Leftrightarrow f_i{}^2(\alpha)+f_i(\alpha)=c_i \Leftrightarrow f_i{}^2(\alpha)+f_i(\alpha)-c_i=0$$

Posons $X = f_i(\alpha)$, il vient que nous obtenons une équation du second degré de la forme :

$$X^2+X+c=0 \Leftrightarrow \Delta=B^2-4AC \Leftrightarrow \begin{cases}X=\dfrac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\\ X=\dfrac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\end{cases}$$

Si $1<X<1$ alors pour les deux première équation, on peut écrire :

$$\begin{cases}f(\alpha)=\dfrac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\\ f(\alpha)=\dfrac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}arc(f(\alpha))=arc\, f\left(\dfrac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\right)\\ arc(f(\alpha))=arc\, f\left(\dfrac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\right)\end{cases} \text{ où } \begin{cases}f=\cos(\alpha)\\ f=\sin(\alpha)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}arc\, f=arc\,\cos(\alpha)\\ arc\, f=arc\,\sin(\alpha)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}arc(f(\alpha))=\left(\alpha;\overline{\alpha}\right)=\alpha+2k\pi;-\alpha+2k\pi\\ arc(f(\alpha))=(\alpha;\overline{\alpha})=(\alpha+2k\pi;(\pi-\alpha)+2k\pi\end{cases}$$

$$\textit{Exemple littéral}: \begin{cases}\cos(\alpha)=\dfrac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\\ ou\\ \sin(\alpha)=\dfrac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\end{cases} \begin{cases}arc(\cos(\dfrac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A})=\left(\alpha+2k\pi;-\alpha+2k\pi\right)\\ ou\\ arc(\sin(\dfrac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A})=(\alpha+2k\pi;(\pi-\alpha)+2k\pi\end{cases}$$

Exemple numérique (recherche d'un exemple crédible)

D) Système d'équation trigonométrique :

$\begin{cases} a\cos(\alpha)+b\sin(\beta)=c \\ a'\cos(\alpha)+b\sin(\beta)=c' \end{cases}$ Posons $X=\cos(\alpha);\ Y=\sin(\beta)$ d'où :

$$\begin{cases} a\cos(\alpha)+b\sin(\beta)=c \\ a'\cos(\alpha)+b\sin(\beta)=c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aX+bY=c \\ a'X+b'X=c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & ab'-a'b \\ ba'-b'a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cb'-c'b \\ c'a-a'c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{cb'-c'b}{ab'-a'b} \\ \dfrac{c'a-a'c}{ba'-b'a} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{c'a-a'c}{ba'-b'a} \\ \dfrac{cb'-c'b}{ab'-a'b} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{cases} = \begin{pmatrix} \dfrac{cb'-c'b}{ab'-a'b} \\ \dfrac{c'a-a'c}{ba'-b'a} \end{pmatrix}$$

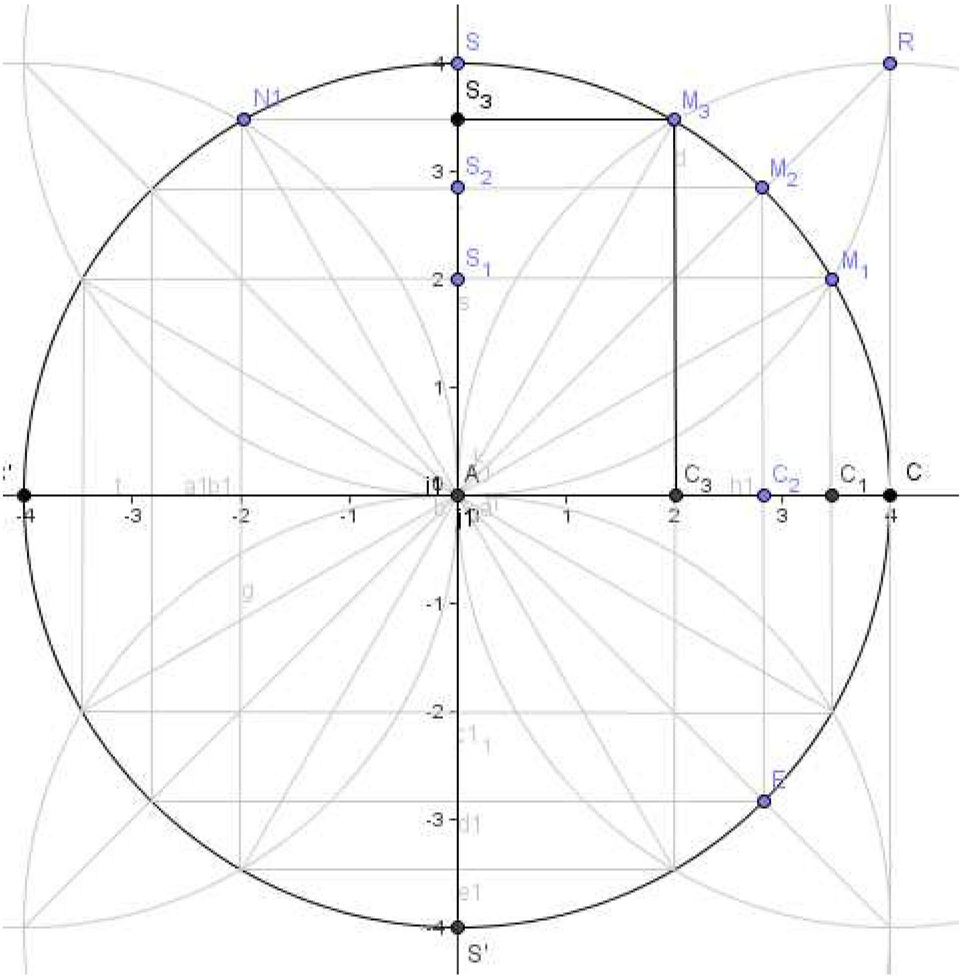
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (\alpha;\overline{\alpha}) \\ (\beta;\overline{\beta}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} arc\ \cos(\alpha) \\ arc\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} arc\cos\left(\dfrac{cb'-c'b}{ab'-a'b}\right) \\ arc\sin\left(\dfrac{c'a-a'c}{ba'-b'a}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} arc\cos\left(\dfrac{cb'-c'b}{ab'-a'b}\right);-arc\cos\left(\dfrac{cb'-c'b}{ab'-a'b}\right) \\ arc\sin\left(\dfrac{c'a-a'c}{ba'-b'a}\right);\pi-arc\sin\left(\dfrac{c'a-a'c}{ba'-b'a}\right) \end{pmatrix}$$

*Exemple numérique (recherche d'exemple crédible) :

5) Equation du cercle

a) Equation du cercle sur l'axe d'origine

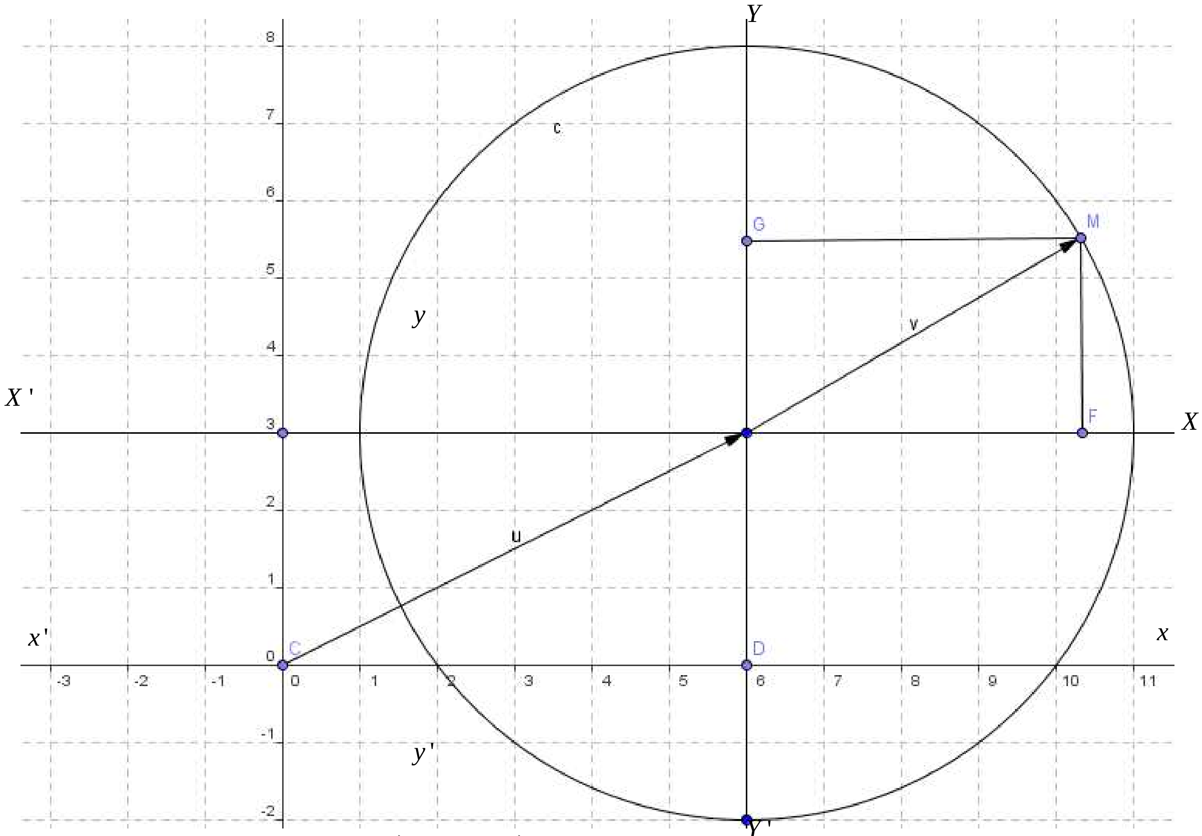
Toute équation dans le plan est de la forme $f(x;y)=ax+by+c$
Et par extension $f(x;y)=ax^n+by^n+c$ formant une courbe quelconque
Si la courbe est sur son origine, elle est de la forme $f(x;y)=-ax+y \Leftrightarrow y=ax$
Si la courbe n'est pas sur son origine, elle est de la forme $f(x;y)=-ax+y+c \Leftrightarrow y=ax+c$
L'équation du cercle n'échappe à cette règle. En prenant un point quelconque du cercle, il vient du théorème de Pythagore que $(OC_i)^2+(OS_i)^2=(OM_i)^2$



Ors (OC_i) a une valeur sur l'axe des cosinus $\cos(x)$ qui représente l'axe des abscisses par extension, soit encore en coordonnées rectangulaire, on peut écrire : $\cos(x)=x$, de même sur l'axe des sinus qui a pour extension l'axe des ordonnées, on peut écrire $\sin(x)=y$
Il vient que sur le cercle trigonométrique l'équation du cercle s'écrit, sachant que le rayon du cercle côte une unité :

$$(OC_i)^2+(OS_i)^2=(OM_i)^2 \Leftrightarrow \cos^2(x)+\sin^2(x)=1 \Leftrightarrow x^2+y^2=R^2$$

b) Equation du cercle désaxée (de l'axe d'origine) :



Soit le repère initial $(O;i;j)$, tel que $\vec{i} \in (x'x) et \vec{j} \in (y'y)$, où le cercle C qui n'est pas situé sur l'origine O, nous devons créer un nouveau repère dont l'origine est le centre du cercle C que l'on va nommé $(O';i';j')$ tel que $\vec{i'} \in (X'X) et \vec{j'} \in (Y'Y)$

On dit que l'on a effectué un : Changement de repère

Le point O' de coordonnées $(0;0)$ qui est centre du cercle, a pour coordonnées $O(6;3)$ sur le repère initial, soit littéralement : $O'(a;b)$, représentant la différence de distance entre le repère initial $(O;i;j)$ et le nouveau repère $(O';i';j')$ où $\vec{i'} \in (X'X)$ et $\vec{j'} \in (Y'Y)$, avec $(X'X)//(x'x)$,et $(Y'Y)//(y'y)$ tel que son équation en appliquant le théorème Pythagore est

$$O'M^2 = X^2 + Y^2 \Leftrightarrow R^2 = X^2 + Y^2 \Leftrightarrow X^2 + Y^2 = R^2$$

Le point a pour coordonnée dans le repère initial $A(x_a - x_0; y_b - y_0) = A(a;b)$, qui vectoriellement s'écrit :

$$\overrightarrow{OO'} = (x_{o'} - x_0)\,\vec{i} + (y_{o'} - y_0)\,\vec{j}$$
$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OO'} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$$

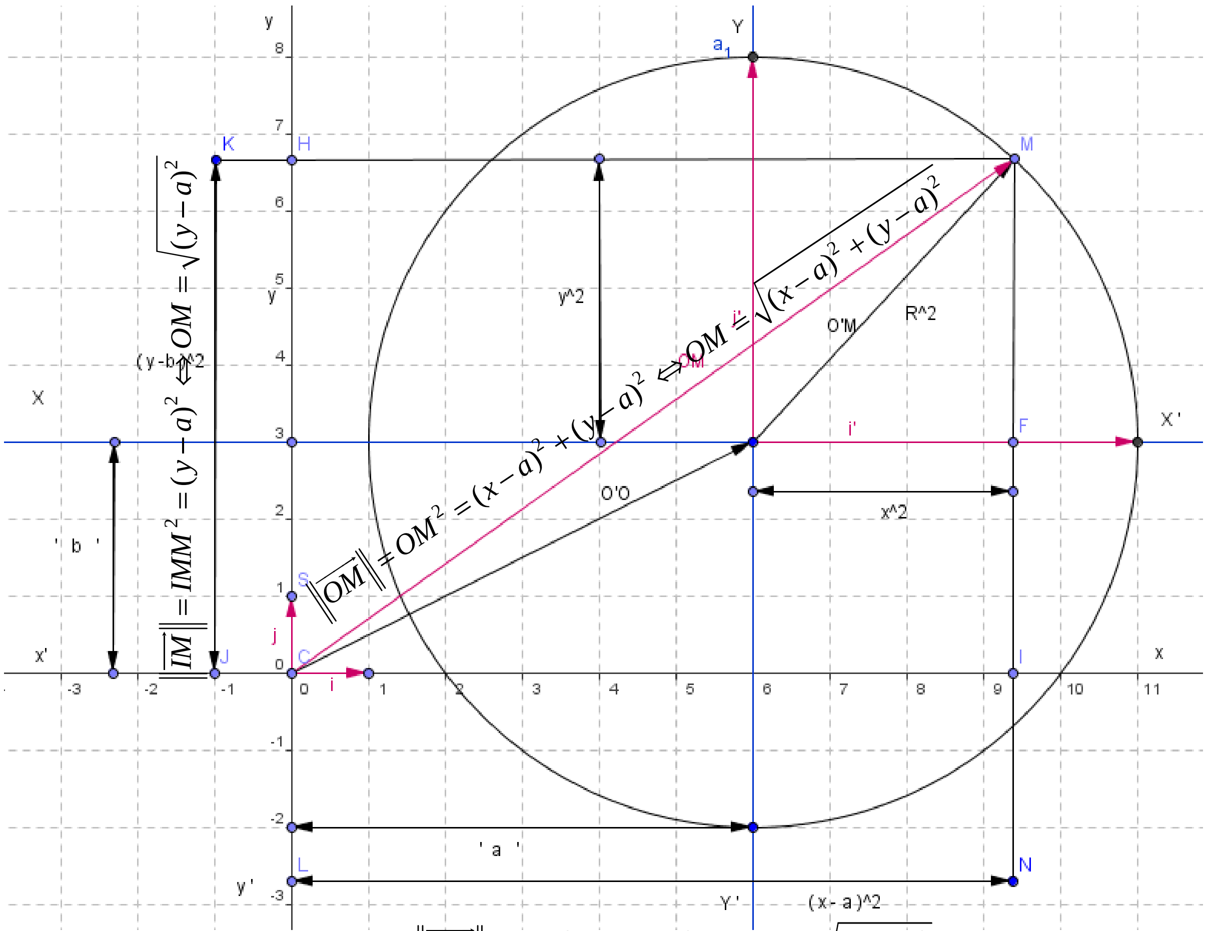
Par suite sur le nouveau repère et le repère initial, à l'aide de la relation de Chasles, on a :

$$\begin{cases} \exists\, C sur\, \Re(O\ i\ \ j)\, tel\ que\ \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}' = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'} = (x-a)\vec{i} + (y-b)\vec{j} \\ \exists\, C sur\, \Re(O\ i'\ \ j')\, tel\ que\ \ \overrightarrow{OM}' = X\vec{i}' + Y\vec{j}' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = (x-a)\, sur\, \Re(O\ i\ \ j) \\ Y = (y-a) sur\, \Re(O\ i'\ \ j') \end{cases}$$

Donc sur le repère initiale, l'équation du cercle désaxée du repère initial s'écrit :

$$\begin{cases} X = (x-a)\, sur\, \Re(O\ \vec{i}\ \ \vec{j}) \\ Y = (y-a) sur\, \Re(O\ \vec{i}\ \ \vec{j}) \\ X^2 + Y^2 = R^2 sur\, \Re(O'\ \vec{i}'\ \ \vec{j}') \end{cases} \quad \Leftrightarrow\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

Représentation graphique :



$$\left\|\overrightarrow{OO'}\right\| = OO'^2 = (x-a)^2 \Leftrightarrow OM = \sqrt{(x-a)^2}$$

Par suite le périmètre du cercle désaxé du repère initial peut s'écrire :

$$\left(\sum_{i=1}^{i=t}(x_i)-a\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{i=t}(y_i)-b\right)^2=R^2 \Leftrightarrow \left(\sum_{i=0}^{i=2\pi}(\cos(\alpha_i)-a)\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{i=2\pi}(\sin(\alpha_i)-b)\right)^2=R^2$$

d) Equation développée du cercle :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=k \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2-k=0$$
$$\Leftrightarrow f(x;y)=(x-a)^2+(y-b)^2-r^2$$
$$\Leftrightarrow f(x;y)=x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2-r^2$$
$$\Leftrightarrow f(x;y)=x^2+y^2-2ax-2by+(b^2+a^2-r^2)$$
$$\Leftrightarrow f(x;y)=x^2+y^2-2ax-2by+K$$
$$\Leftrightarrow f(x;y)=x^2+y^2+2ax+2by+K$$

e) Equation polaires de l'équation du cercle

$$\begin{cases} x=r\cos(\alpha) \\ y=r\sin(\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow f(x,\alpha)=(r;\alpha)/\begin{cases} r=x^2+y^2=\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha) \\ Arc\sin(\alpha)\cap Arc\cos(\alpha)=(\alpha;\overline{\alpha}) \end{cases}$$

c) Equation de cercles et de droites

Intersection d'un cercle et d'une droite:

$$C(x)\bigcap D(x)=\{M_1;M_2\} tel\ que \begin{cases} D(x)=b_1x-a_1y+c \\ C(x)=x^2+y^2-r^2 \end{cases} C(x)=D(x)=M_1;M_2$$

$$\Leftrightarrow b_1x-a_1y+c=x^2+y^2-r^2 \Leftrightarrow Ax^2+Bx+C=0$$

$Si\ \Delta \geq 0:$

$$\begin{cases} x=\dfrac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}=\dfrac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}=\dfrac{-B-\Delta'}{2A}=x_4 \\ x'=\dfrac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}=\dfrac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A}=\dfrac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A}=x_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1x-a_1y+c \\ y_4=\dfrac{b_1(x_4)+c}{a_1} \\ y_5\dfrac{b_1(x_4)+c}{a_1} \end{cases}$$

- Intersection de deux cercles sur l'axe des absisses :

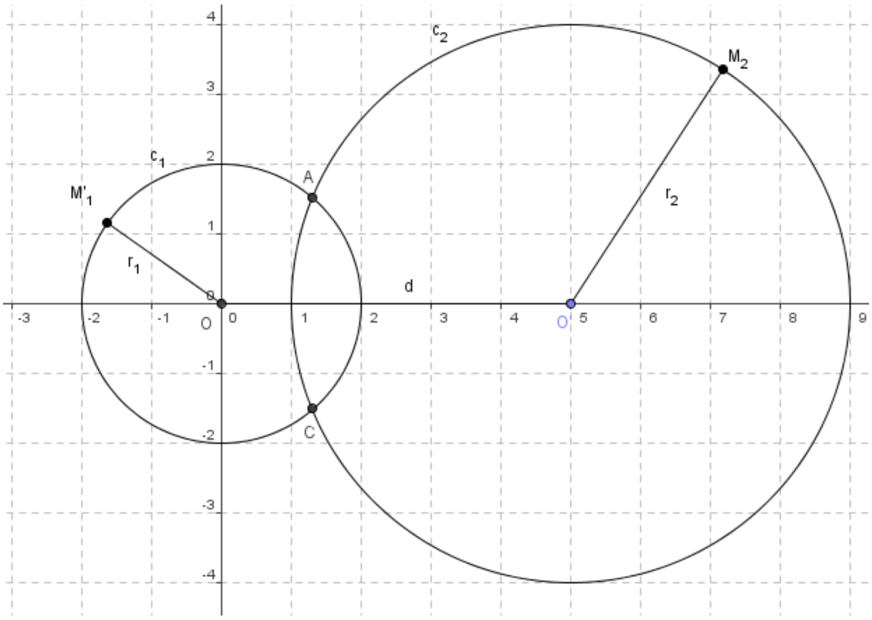
$$\left(C_1(R)=C_2(R)=r\ ;O(0;0)\ ;O'(a;0);\left\|\overrightarrow{OO'}\right\|=d\right)\Leftrightarrow \begin{cases} C_1(x)=x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}-r_1^2 \\ C_2(x)=(x_2-d)^2+y^2-r_2^{\ 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{y_1=y_2\ ;x_2=x_1} \\ y_1^{\ 2}=r_1^{\ 2}-x_1^{\ 2} \\ y_2^{\ 2}=(x_2-d)^2-r_2^{\ 2} \end{cases}$$

$$C_1(x)\bigcap C_2(x)\Leftrightarrow C_1(x)=C_2(x)\Leftrightarrow x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}-r_1^{\ 2}=x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}-2ax_2+(a^2-r_2^{\ 2})$$

$$\Leftrightarrow 2ax_2=-d^2+(-r_2^{\ 2}+r_1^{\ 2})\Leftrightarrow x_2=x=\frac{d^2+(-r_2^{\ 2}+r_1^{\ 2})}{2a}=\frac{d^2+(r_2^{\ 2}-r_1^{\ 2})}{2a}=\frac{A}{B};Si\,r_1=r_2\Rightarrow(r_2^{\ 2}-r_1^{\ 2})=0$$

$$\Rightarrow y=P\left(\frac{A}{B}\right)=0\Leftrightarrow y_1^{\ 2}=r_1^{\ 2}-x^2\Leftrightarrow y_1=y=\pm\sqrt{r_1^{\ 2}-\left(\frac{A}{B}\right)^2}=P\left(\frac{A}{B}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\bigcup_{i=1}^{i=2}M_i\right)\left(\bigcup_{i=1}^{i=2}x_i;y_i\right)=(M_1;M_2)\big((x_2;y_1);(x_2;-y_1)\big)$$



- Intersection de d'un cercle et d'une droite désaxée

$$Equation\ \ de\ \ la\ \ droite$$

$$(P_1;P_2;P)\left(\begin{pmatrix}x_{11}\\y_{21}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{12}\\y_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)\ tel\ que \overrightarrow{P_1P_2}=k\ \overrightarrow{PP_2}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-x_{11}\\y-y_{21}\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x_{12}-x_{11}\\y_{22}-y_{21}\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-x_{11}\\y-y_{21}\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x-x_{11}=k\ (a_{11})\\y-y_{21}=k\ (a_{21})\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\dfrac{x-x_{11}}{a_{11}}\\k=\dfrac{y-y_{21}}{a_{21}}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{x-x_{11}}{a_{11}}=\frac{y-y_{21}}{a_{21}}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-x_{11}&a_{11}\\y-y_{21}&a_{21}\end{vmatrix}\Leftrightarrow a_{21}(x-x_{11})-a_{11}(y-y_{11})=0$$

$$\Leftrightarrow a_{21}x-a_{11}y+(-a_{21}x_{11}+a_{11}y_{21})=0\Leftrightarrow D(x):a_{21}x-a_{11}y+k_{23}=0\Leftrightarrow\begin{cases}D(x)=0\\D(x)=a_{21}x-a_{11}y+k_{23}\end{cases}\Leftrightarrow a_{21}x-a_{11}y+k_{23}$$

$$Equation\ du\ cercle\ dans\ R(O;\vec{i};\vec{j})$$

$$\begin{cases}(O;C_n)\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}\right)\Leftrightarrow(O;C_n)=\begin{pmatrix}x_3-0\\y_3-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}\Rightarrow r_{23}=\sqrt{(x_3)^2+(y_3)^2}\\C(x):x^2+y^2=r^2\Leftrightarrow C(x)=x^2+y^2-r^2\ Ou\end{cases}$$

$$Si\begin{cases}C(x):(x-b_{11})^2-(y-b_{21})^2=r_{23}{}^2\\(X;Y)=((x-b_{11});(y-b_{21}))\Leftrightarrow(x;y)=((X+b_{11});(Y+b_{21}))\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}D(x)=a_{21}(X+b_{11})-a_{11}(Y+b_{21})+k_{23}\\C(x)=X^2-Y^2-r_{23}{}^2\end{cases}$$

Dans les deux cas, on résout :

$$\begin{cases}D(x)=a_{21}X-a_{11}Y+(a_{11}y_{21}-a_{21}x_{11})\\C(x)=(X^2+b_{11}-b_{11})-(Y^2+b_{21}-b_{21})=r_{23}{}^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_{21}X-a_{11}Y+k_{23}=0\\X^2-Y^2=r_{23}{}^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Y=\dfrac{k_{23}-a_{21}X}{-a_{11}}\\Y^2=r_{23}{}^2-X^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Y^2=\left(\dfrac{a_{21}X-k_{23}}{a_{11}}\right)^2\\Y^2=r_{23}{}^2-X^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a_{11}{}^2Y^2=a_{33}{}^2-2a_{23}a_{21}X+a_{21}{}^2X\\a_{11}{}^2Y^2=-a_{11}{}^2\left(r_{23}{}^2-X^2\right)\end{cases}\ soit\ \left|\begin{array}{l}\Leftrightarrow k_{23}{}^2-2a_{33}a_{21}X+a_{21}{}^2X^2-a_{11}{}^2(r_{23}{}^2-X^2)=0;\\\Leftrightarrow(k_{23}{}^2-a_{11}{}^2r^2)-2k_{23}a_{21}X+(a_{21}{}^2-a_{11}{}^2)X^2=0\Leftrightarrow Ax^2+Bx+C=0\\avec\ \ (A;B;C)=\left((a_{21}{}^2-a_{11}{}^2);(2a_{33}a_{21});\left(k_{23}{}^2-a_{11}{}^2r_{23}{}^2\right)\right)\\et\,(a_{11};a_{21};k_{23})=\left((y_{22}-y_{21});(x_{12}-x_{11});(a_{11}y_{21}-a_{21}x_{11})\right)\end{array}\right.$$

$$\Delta=(-B)^2-4(A)(C)\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{B^2-4AC}\Leftrightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{k^2\Delta'}=k\sqrt{\Delta'}\ Si\ et\ Si\ \ \Delta\geq0$$

$$Si\ \ \Delta=0\Rightarrow X_1=X_2=-\frac{B}{2A};Si\,\Delta>0\Rightarrow(X_1;X_2)=\left(\frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A};\frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A}\right)=\left(\frac{-B-k\sqrt{\Delta'}}{2A};\frac{-B+k\sqrt{\Delta'}}{2A}\right);$$

Ensuite si $(a;b)\neq(0;0)\Rightarrow\begin{cases}Y=\dfrac{K-b_1X}{-a_1}\\(X;Y)=((x-a);(y-b))\end{cases}\ soit\ \left|\begin{array}{l}(X;Y)=((x-b_{11});(y-b_{21}))\\\Leftrightarrow(x;y)=((X+b_{11});(Y+b_{21}))\end{array}\right.$

Alors : $\begin{cases}Y_1=\dfrac{a_{33}-a_{21}X_1}{-a_{11}}\\Y_2=\dfrac{a_{33}-a_{21}X_2}{-a_{11}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(y-b_{21})=\dfrac{a_{33}-a_{21}(x_1-b_{11})}{-a_{11}}\\(y-b_{21})=\dfrac{a_{33}-a_{21}(x_2-b_{11})}{-a_{11}}\end{cases}$ sinon $\begin{cases}(y-b_{21})=\dfrac{a_{33}-a_{21}x}{-a_{11}}\\(y-b_{21})=\dfrac{a_{33}-a_{21}x}{-a_{11}}\end{cases}$

Rq : On aurait pu formaliser l'équation par (a1;b1) ; x-(x1;x2) ; y-(y1;y2), écrire l'équation de la droite dx + ey = f, écrire l'équation du cercle : g x^2+ h y^2=r^2, et les résultante de l'Equation Ax^2 + Bx + c. et au niveau informatique, revenir au variable initiale. Mais a11;a12;(a13; a31; k13), sont l'équation de la droite, b11;b12 l'équation du cercle ; A; B; C l'équation du second degré.

d) Intersection de deux cercles déxasées (exemple numérique page 75)

- Intersection des deux cercles avec changement de variables

On note $(x_a;x_b)$ et $(y_a;y_b)$ les coordonnées de A et B. les équations des deux cercles sont donc :

$$\begin{cases}(x-x_a)^2+(y-y_a)=r_a^{\ 2}\\(x-x_b)^2+(y-y_b)=r_b^{\ 2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2-2x_ax+x_a^{\ 2})+(y^2-2y_ay+y_a^{\ 2})=r_a^{\ 2}\\(x^2-2x_bx+x_b^{\ 2})+(y^2-2y_by+y_b^{\ 2})=r_b^{\ 2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y^2-2y_ay=-x^2+2x_ax-x_a^{\ 2}-y_a^{\ 2}+r_a^{\ 2}\\y^2-2y_by=-x^2+2x_bx-x_b^{\ 2}-y_b^{\ 2}+r_b^{\ 2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2-2y_ay=k_1\\y^2-2y_by=k_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2(y_a+y_b)y_1=k_1-k_2\\-2(y_b+y_a)y_2=k_2-k_1\end{cases}$$

Posons pour simplifier

$(X;Y)=(x_a;y_a)\Leftrightarrow(x;y)=(X+x_a;Y+y_a)$

Il vient que le système d'équation s'écrit alors :

$$\begin{cases}(X+x_a-x_a)^2+(Y+y_a-y_a)^2=r_a^{\ 2}\\(X+x_a-x_b)^2+(Y+y_a-y_b)^2=r_b^{\ 2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X^2+Y^2=r_a^{\ 2}\\(X^2+2x_{ab}X+x_{ab}^{\ 2})+(Y^2+2y_{ab}Y+y_{ab}^{\ 2})=r_b^{\ 2}\end{cases}$$

Nous avons donc par substitution :

$$\begin{cases}X^2+Y^2=r_a^{\ 2}\\X^2+Y^2=2x_{ab}X-x_{ab}^{\ 2}-2y_{ab}Y-y_{ab}^{\ 2}+r_b^{\ 2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -2x_{ba}X-2y_{ab}Y-x_{ab}^{\ 2}-y_{ab}^{\ 2}+r_b^{\ 2}=r_a^{\ 2}$$

$$\Leftrightarrow 2x_{ab}X+2y_{ab}Y-x_{ab}^{\ 2}-y_{ab}^{\ 2}-r_b^{\ 2}+r_a^{\ 2}=0$$

En posant :

$a=-2x_b\quad b=-2y_b\quad c=r_a^{\ 2}-r_b^{\ 2}+y_b^{\ 2}+x_b^{\ 2}$

On peut écrire la droite d'équation suivante :

$$-2x_{ab}X-2y_{ab}Y=x_{ab}^{\ 2}+y_{ab}^{\ 2}+r_a^{\ 2}-r_b^{\ 2}$$

$$\Leftrightarrow\quad a\ X+\ B\quad y\ =C$$

Soit : $\quad b\,y\ =c-a\ x$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b^2Y^2=(c-aX)^2\\X^2+Y^2=r_a^{\ 2}\Leftrightarrow Y^2=r_a^{\ 2}-X^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow b^2(r_a^{\ 2}-X^2)=(c^2-2aX+a^2X^2)$$

$$\Leftrightarrow (b^2+a^2)X^2-2aX+(c-br_a^{\ 2})=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2x_b\quad b=-2y_b\quad c=r_a^{\ 2}-r_b^{\ 2}+y_b^{\ 2}+x_b^{\ 2}\\(b^2+a^2)X^2-2aX+(c-b^2r_a^{\ 2})=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow(4y_{ab}^{\ 2}+4x_{ab}^{\ 2})X^2+4x_{ab}X+(r_a^{\ 2}-r_b^{\ 2}+y_{ab}^{\ 2}+x_{ab}^{\ 2}-y_{ab}^{\ 2}r_a^{\ 2})=0$$

$$\Leftrightarrow AX^2+B\ X+C=0$$

C'est l'équation du second degré de la forme :

$$\Leftrightarrow\begin{cases}AX^2+BX+C\\(x;y)=(X+a;Y+b)\end{cases}\Leftrightarrow(X_1;X_2)=\left(\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A};\frac{-B'-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\right)=(\alpha_1;\alpha_2)$$

$$\Leftrightarrow(x_1;x_2)=(\left|\alpha_1-e_{x;1}\right|-e_{x;2};\left|\alpha_2-e_{x;1}\right|-e_{x;2})\Rightarrow(y_1;y_2)=f(x_1;x_2)=(\left|f(X_1)-e_{y;1}\right|-e_{y;2};\left|f(X_1)-e_{y;1}\right|-e_{y;2})$$

Intersection des deux cercles avec les variables initiales :

$$\forall\begin{cases}C_1(x_a;y_a)\\C_2(x_b;y_b)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-x_a)^2+(y-y_a)=r_a{}^2\\(x-x_b)^2+(y-y_b)=r_b{}^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2+2x_ax+x_a{}^2)+(y^2+2y_ay+y_a{}^2)=r_a{}^2\\(x^2+2x_bx+x_b{}^2)+(y^2+2y_by+y_b{}^2)=r_b{}^2\\(X;Y)=(x-x_a;y-y_a)\Leftrightarrow(x;y)=(X+x_a;Y+y_a)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(X+(x_b-x_a))^2+(Y+(y_b-y_a))^2=r_a{}^2\\(X+x_b-x_b)^2+(Y+y_b-y_b)=r_b{}^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(X+(x_b-x_a))^2+(Y+y_b-y_a)^2=r_a{}^2\\X^2+Y^2=r_b{}^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X^2+2(x_b-x_a)X+(x_b-x_a)^2+Y^2+2(y_b-y_a)Y+(y_b-y_a)^2-r_a{}^2=0$$

$$\Leftrightarrow Y^2+X^2+2(y_b-y_a)Y+2(x_b-x_a)X+\left((y_b-y_a)^2+(x_b-x_a)^2-r_a{}^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}Y^2+2(y_b-y_a)Y=-X^2-2(x_b-x_a)X+\left(-r_a{}^2+(y_b-y_a)^2+(x_b-x_a)^2\right)=0\\Y^2=r_b{}^2-X^2\Leftrightarrow Y^2=r_b{}^2-X^2\Leftrightarrow Y^2=\sqrt{r_b{}^2-X^2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow-2(y_b-y_a)Y=\left[-X^2-2(x_b-x_a)X+\left(r_a{}^2-(y_b-y_a)^2-(x_b-x_a)^2\right)\right]-\left(r_b{}^2-X^2\right)$$

$$\Leftrightarrow-2(y_b-y_a)Y=\left[-2(x_b-x_a)X+\left(r_a{}^2-(y_b-y_a)^2-(x_b-x_a)^2-r_b{}^2\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow-2(y_b-y_a)\sqrt{r_b{}^2-X^2}=\left[-X^2-2(x_b-x_a)X+\left(r_a{}^2-(y_b-y_a)^2-(x_b-x_a)^2-r_b{}^2\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{r_b{}^2-X^2}\right)^2=\left(\frac{-2(x_b-x_a)X+\left(r_a{}^2-r_b{}^2-(y_b-y_a)^2-(x_b-x_a)^2\right)}{-2(y_b-y_a)}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow r_b{}^2-X^2=\left(\frac{\left(-2(x_b-x_a)X-\left(r_b{}^2-r_a{}^2+(y_b-y_a)^2+(x_b-x_a)^2\right)\right)^2}{(-2(y_b-y_a))^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(2^2(y_b-y_a)\right)\left(r_b{}^2-X^2\right)=\left(-2(x_b-x_a)X-\left[\left(r_a{}^2-r_b{}^2-(y_b-y_a)^2-(x_b-x_a)^2\right)\right]\right)^2$$

$$\Leftrightarrow(bY)^2=(aX+c)^2\Leftrightarrow b^2Y^2=a^2X^2+2acX+c^2$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-4(y_b-y_a)^2X^2\\0\\(4(y_b-y_a))^2r_b{}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4(x_b-x_a)^2X^2\\-2\left(2(x_b-x_a)\left[\left(r_a{}^2-r_b{}^2-(y_b-y_a)^2-(x_b-x_a)^2\right)\right]\right)X\\\left[r_a{}^2-(x_b-x_a)^2-(y_b-y_a)^2-r_b{}^2\right]^2\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}4\left[(x_b-x_a)^2-(y_b-y_a)^2\right]X^2\\-2\left(2(x_b-x_a)\left[\left(r_a{}^2-r_b{}^2-(y_b-y_a)^2-(x_b-x_a)^2\right)\right]\right)X\\\left[\left(r_a{}^2-r_b{}^2-(y_b-y_a)^2+(x_b-x_a)^2\right)\right]^2-(4(y_b-y_a))^2r_b{}^2\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}AX^2\\BX\\C\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}AX^2+BX+C\\(x;y)=(X+a;Y+a)\\(y;y')=f(X1+b;X2+b)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x_1;x_2)=\pm\left(\left|\dfrac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}-x_a\right|;\left|\dfrac{-B'-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}-x_a\right|\right)\\(y;y')=Y=-\dfrac{2(x_b-x_a)}{2(y_b-y_a)}(X)+\dfrac{K}{2(y_b-y_a)}\end{cases}$$

Expression littérale du determinant delta (facultatif)

$$\Delta = \begin{pmatrix} \left(-4\left((x_b - x_a)\left[\left(r_a^{\,2} - r_b^{\,2} - (y_b - y_a)^2 - (x_b - x_a)^2\right)\right]\right)\right)^2 \\ -4\left(4\left[(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2\right]\right)\left(\left[\left(r_a^{\,2} - r_b^{\,2} - (y_b - y_a)^2 - (x_b - x_a)^2\right)\right]^2 - (4(y_b - y_a))^2 r_b^{\,2}\right) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \Delta = \begin{pmatrix} 4^2 x_{ba}^{\,2}(r_a^{\,2} - r_b^{\,2} - y_{ba}^{\,2} - x_{ba}^{\,2})^2 \\ -4^2(x_{ba}^{\,2} + y_{ba}^{\,2})\left((r_a^{\,2} - r_b^{\,2} - y_{ba}^{\,2} - x_{ba}^{\,2})^2 - 4y_{ba}^{\,2} r_b^{\,2}\right) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 4^2 x_{ba} k^2 - 4^2(x_{ba}^{\,2} + y_{ba}^{\,2})(k^2 - 4y_{ba}^{\,2} r_b^{\,2})$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 4^2 x_{ba} k^2 - ((4^2 x_{ba}^{\,2} k^2 - 4^3 x_{ba}^{\,2} y_{ba}^{\,2} r_b^{\,2}) + (4^2 y_{ba}^{\,2} k^2 - 4^3 y_{ba}^{\,4} r_b^{\,2}))$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 4^2 x_{ba} k^2 - 4^2 x_{ba}^{\,2} k^2 + 4^3 x_{ba}^{\,2} y_{ba}^{\,2} r_b^{\,2} - 4^2 y_{ba}^{\,2} k^2 + 4^3 y_{ba}^{\,4} r_b^{\,2}))$$

$$\Leftrightarrow \Delta = -4^3 x_{ba}^{\,2} y_{ba}^{\,2} r_b^{\,2} + 4^3 y_{ba}^{\,4} r_b^{\,2} - 4^2 y_{ba}^{\,2} k^2 = -4^2(4(x_{ba}^{\,2} y_{ba}^{\,2} r_b^{\,2} + y_{ba}^{\,4} r_b^{\,2}) - (y_{ba}^{\,2} k^2)$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 4^2(4(x_{ba}^{\,2} y_{ba}^{\,2} r_b^{\,2} + y_{ba}^{\,4} r_b^{\,2}) - (y_{ba}^{\,2} k^2) \;\; avec \begin{cases} (x_b - x_a) = x_{ba} \\ (y_b - y_a) = y_{ba} \\ r_a^{\,2} - r_b^{\,2} - y_{ba}^{\,2} - x_{ba}^{\,2} = k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 4^2\left(4\left((x_b - x_a)^2 (y_b - y_a)^2 r_b^{\,2} + (y_b - y_a)^4 r_b^{\,2}\right) - \left((y_b - y_a)^2 (r_a^{\,2} - r_b^{\,2} - y_{ba}^{\,2} - x_{ba}^{\,2})\right)^2\right)$$

$$(X_1;X_2) = \frac{-4(x_{ba})k \pm \sqrt{4^2 x_{ba} k^2 - 4^2(x_{ba}^{\,2} + y_{ba}^{\,2})(k^2 - 4y_{ba}^{\,2} r_b^{\,2})}}{4(x_{ba}^{\,2} - y_{ba})^2} \;\; avec\, k = (r_a^{\,2} - r_b^{\,2} - y_{ba}^{\,2} - x_{ba}^{\,2})$$

$$\Leftrightarrow (X_1;X_2) = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4(x_{ba})k \pm 4\sqrt{x_{ba} k^2 - (x_{ba}^{\,2} + y_{ba}^{\,2})(k^2 - 4y_{ba}^{\,2} r_b^{\,2}))}}{2.4(x_{ba}^{\,2} - y_{ba})^2}$$

$$\Leftrightarrow (X_1;X_2) = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(x_{ba})(r_a^{\,2} - r_b^{\,2} - y_{ba}^{\,2} - x_{ba}^{\,2}) \pm \sqrt{4(x_{ba}^{\,2} y_{ba}^{\,2} r_b^{\,2} + y_{ba}^{\,4} r_b^{\,2}) - (y_{ba}^{\,2})(r_a^{\,2} - r_b^{\,2} - y_{ba}^{\,2} - x_{ba}^{\,2})^2)}}{2.((x_b - x_a)^2 - (y_b - y_a)^2)}$$

Ors de :

$$\Leftrightarrow \left(2^2(y_b - y_a)\right)\left(r_b^{\,2} - X^2\right) = \left(-2(x_b - x_a)X - \left[\left(r_a^{\,2} - r_b^{\,2} - (y_b - y_a)^2 - (x_b - x_a)^2\right)\right]\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (bY)^2 = (aX + c)^2 \Leftrightarrow b^2 Y^2 = a^2 X^2 + 2acX + c^2 \;\; avec \begin{cases} 2(y_b - y_a) = b; r_b^{\,2} - X^2 = Y \\ -2(x_b - x_a) = a; r_a^{\,2} - r_b^{\,2} - (y_b - y_a)^2 - (x_b - x_a)^2 = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow bY = aX + c$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{a}{b}X + \frac{c}{b}$$

Il vient que :

$$Y = \frac{-2(x_b - x_a)}{2(y_b - y_a)}X + \frac{r_a^{\,2} - r_b^{\,2} - (y_b - y_a)^2 - (x_b - x_a)^2}{2(y_b - y_a)}$$

$$\Leftrightarrow Y = -\frac{2(x_b - x_a)}{2(y_b - y_a)}X + \frac{k}{2(y_b - y_a)}$$

En résumé :

Changement de (référentiel;base):R (O;i;j)=R'(O';αi;βj); $(X;Y)=(x+a;y+b)\Leftrightarrow(x;y)=(X-a;Y-b)$

$$-2(y_b-y_a)Y=\left[-2(x_b-x_a)X+\left(r_a{}^2-(y_b-y_a)^2-(x_b-x_a)^2-r_b{}^2\right)\right]$$

$$\begin{pmatrix} 4\left[(x_b-x_a)^2-(y_b-y_a)^2\right]X^2 \\ -2\left(2(x_b-x_a)\left[\left(r_a{}^2-r_b{}^2-(y_b-y_a)^2-(x_b-x_a)^2\right)\right]\right)X \\ \left[\left(r_a{}^2-r_b{}^2-(y_b-y_a)^2-(x_b-x_a)^2\right)\right]^2-\left(4(y_b-y_a)\right)^2 r_b{}^2 \end{pmatrix}^{+}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix} AX^2 \\ BX \\ K \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{cases} (X_1;X_2)=\dfrac{-(-4(x_{ba})K)\pm\sqrt{4^2(x_{ba}K^2-(x_{ba}{}^2+y_{ba}{}^2)(K^2-4y_{ba}{}^2r_b{}^2))}}{2.4(x_{ba}{}^2-y_{ba})^2}=\dfrac{x_{ba}K\pm\sqrt{(4(x_{ba}{}^2y_{ba}{}^2r_b{}^2+y_{ba}{}^4r_b{}^2)-(y_{ba}{}^2k^2)}}{2(x_{ba}{}^2-y_{ba})^2} \\ (Y_1;Y_2)=Y=\dfrac{-2(x_b-x_a)}{2(y_b-y_a)}X+\dfrac{r_a{}^2-r_b{}^2-(y_b-y_a)^2-(x_b-x_a)^2}{2(y_b-y_a)}\Leftrightarrow Y=-\dfrac{(x_b-x_a)}{(y_b-y_a)}X+\dfrac{k}{2(y_b-y_a)} \end{cases}$$

Vérifié numériquement

A	B	C	D		ref	-3	3	4
	x	y	r		(x';y')=(1;1)	1	8	2
A=o1	2	5	3		Repère R'	-8	-2	
B=o2	-3	3	4			x'	y'	
					A=o'1	10	7	9
k_1	-36	4			B=o'2	5	5	16
A	116	29				x	y	
B	-720	-180			B-A	-5	-2	
C	1040	260			Ref B=o'2	5	5	
#REF!	2240		2240			r_a	r_b	
#REF!	47,32863826					3	4	
	180	47,32863826						
	58							
X1	3,91945928			2240				
X2	2,287437271							
x1	3,91945928	-5	8	0,9195				
x2	2,287437271	-5	8	-0,7126				
Y1	6,5							
Y2	6,5							
y1	-0,798648201	-5	2	2,2014				
y2	3,281406822	-5	2	6,2814				

e) Exemples numériques

Exemple numérique 01 : Intersection d'un cercle et d'une droite

Soit deux point $P_1(-7\,;-5)$ $P_2(4\,;\,4)$ de la droite rencontrant le cercle de coordonnée $O(0;0)$ et $C_n(3;0)$, Il vient que : $(P_1P_2) = ((-7;-5);(4;4)) \Leftrightarrow (\overrightarrow{P_1P_2}) = (-7-4;-5-4) = (-11;-9)$

Posons un point inconnue P de coordonnée $(x;y)$ appartenant à $\overrightarrow{P_1P_2}$ soit $P \in [P_1P_2]$, il vient que

$\overrightarrow{PP_2} = (x-4;y-4)$ tel que $\overrightarrow{P_1P_2} = k\ \overrightarrow{PP_2} \Leftrightarrow (x-4;y-4) = k\ (-11;-9) \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 = k\ (-11) \\ y-4 = k\ (-9) \end{cases}$

Soit :

$$\begin{cases} k = \dfrac{x-4}{-11} \\ k = \dfrac{y-4}{-9} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-4}{-11} = \frac{y-4}{-9} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-4 & -7-5 \\ y-4 & -5-4 \end{vmatrix} \Leftrightarrow -9(x-4) = -11(y-4) \Leftrightarrow -9x+36+11y-44 = 0$$

On peut donc écrire l'équation de la droite :

$$-9x+11y-8 = 0 \Leftrightarrow -9x+11y = 8$$

Et un cercle C d'équation C(x) tel que son centre est le centre du repère R(O ; i ; j), et le point C_n , extrémité du cercle a pour coordonnée $O(0;0)$; $C_n(3;0)$, qui implique que

$$\|OC_n\| = \sqrt{3^2+0^2} = \sqrt{9} = 3 = r$$

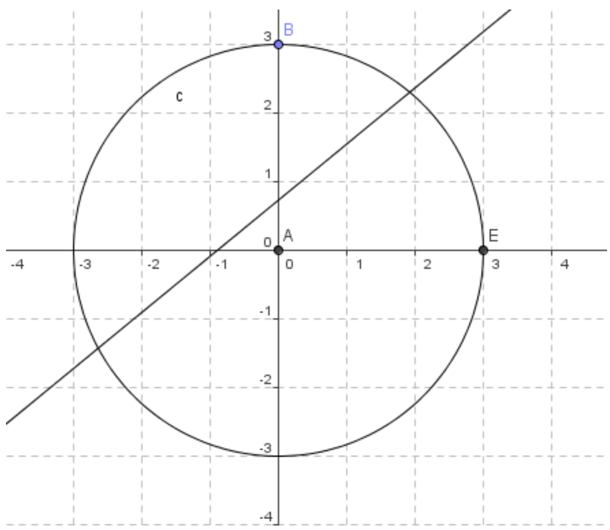
Du théorème de Pythagore dans le cercle, on peut écrire :

$$x^2+y^2 = 3^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 9$$

Par suite l'intersection de la droite et du cercle représentent l'intersection des deux équations soit :

$$C \cap D = \{M_1;M_2\} \Leftrightarrow C(x) \cap f(x) = (M_1;M_2)\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

Soit $(M_1;M_2) = \begin{cases} C_1 : x^2+y^2 = 9 \\ f : -9x+11y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 : x^2+y^2-9 = 0 \\ f : -9x+11y-8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1(x) = x^2+y^2-9 \\ f(x) = -9x+11y-8 \end{cases}$



Par suite, $\forall (x;y)\in \mathbb{R}^2$, il vient que :

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ -9x+11y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=9-x^2 \\ y^2=\left(\dfrac{8+9x}{11}\right)^2=\dfrac{64+144x+81x^2}{121x} \end{cases} \Leftrightarrow 64+144x+81x^2=121(9-x^2)$$

Ou

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ -9x+11y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=9 \\ 11y=8+9x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=9-x^2 \\ (11)^2\,y^2=(8+9x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 121y^2=1089+\ \ 0\,x\ -121\,x^2 \\ 121y^2=\ \ 64\ +144\,x\ +81\,x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 64+144\,x+81x^2=1089-121x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 202x^2+144x-1025=0 \\ -202-144x+1025=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 202\,x^2 144x-1025=0 \ avec \begin{cases} 202=2\times 101 \\ 144=2^4\times 3^2\times 1 \\ 1025=5^2\times 41*1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a\,x^2+b\,x+c=202x^2+144x-1025$$

$$\Delta=b^2-4ac=(144)^2-4(202)(-1025)=20\ 736+828\ 200=848\ 936$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{848\ 936}=921{,}377\ 23$$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2(a)}=\dfrac{-144-921{,}377}{404}=\dfrac{-932{,}377}{404}=-2.637 \\ x_2=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2(a)}=\dfrac{-144+921{,}377}{404}=\dfrac{915{,}788}{404}=1.924 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=P(x_1)=-\dfrac{9}{11}\left(-2.637\right)+\dfrac{8}{11}=1{,}430 \\ y=P(x_2)=-\dfrac{9}{11}\left(-1{,}924\right)+\dfrac{8}{11}=2{,}301 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} OM_1 \\ OM_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2.637 & -1{,}430 \\ 1.924 & 2{,}301 \end{pmatrix}$$

Exemple numérique 02 : Intersection d'un cercle et d'une droite

Soit Une droite D définie par deux points de coordonnée connu et un point P de coordonnée inconnue :

$$\begin{pmatrix} P_2 & P_1 & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\end{pmatrix} \quad S\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}3,29\\3,72\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}7,99\\7,24\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

Soit un Cercle C de centre connu désaxée du repère initial, et un point du cercle

$\begin{pmatrix} OO' & OA \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}\end{pmatrix}$ tel que son rayon est : $\overrightarrow{O'A}\begin{pmatrix}6-6\\5-2\end{pmatrix}=\overrightarrow{O'A}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\Rightarrow r=\left\|\overrightarrow{O'A}\right\|=\sqrt{0^2+3^2}=\sqrt{9}=3$

Il vient que la droite D(x) a pour équation :

$$D(x)=\begin{vmatrix}x-(-3) & 9-(-3)\\ y-(-1) & 8-(-1)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x+3 & 12\\ y+1 & 9\end{vmatrix}=9(x+3)-12(y+1)=9x-12y+(27-12)=9x-12y+15$$

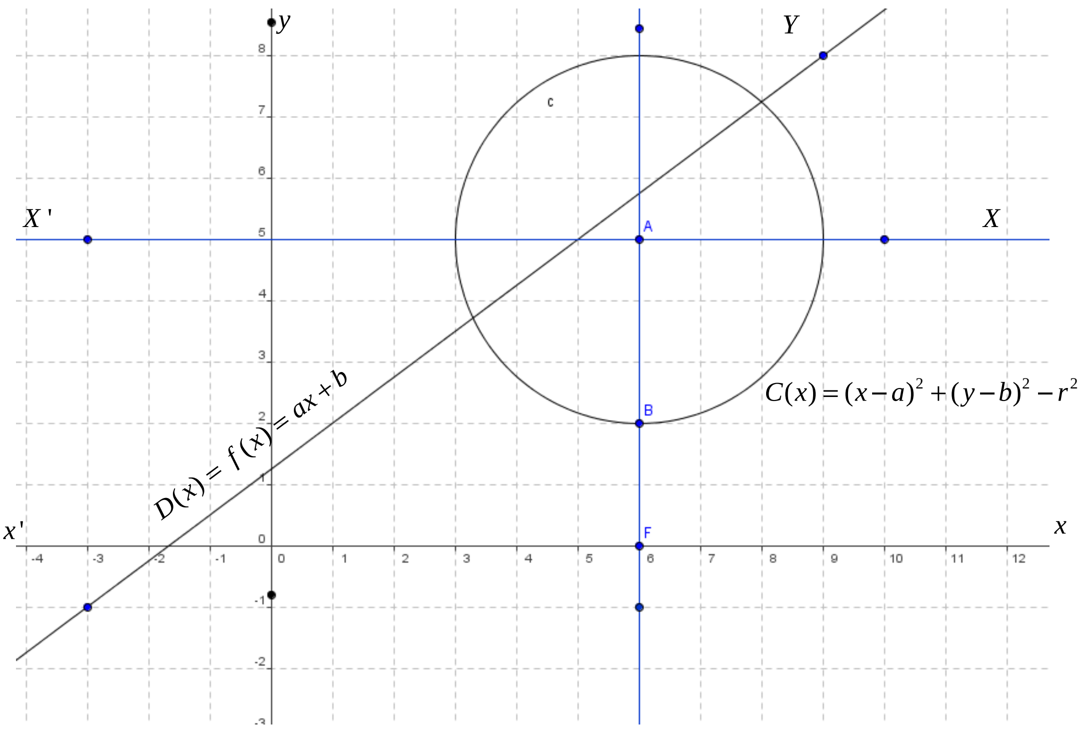
Ainsi que l'équation du cercle désaxée de son repère initial sachant que son rayon est 3, est :

$$C(x)=(x-6)^2+(y-5)^2-3^2=x^2+y^2-2(6x-5y)+(36+25-9)=x^2+y^2-12x-10y+52$$

$$\Rightarrow C(x)=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-12x-10y+52=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-12x-10y=-52$$

L'intersection du cercle et de la droite est donc la résolutions du système tel que:

$$D(x)\cap C(x) \Leftrightarrow D(x)=C(x)\begin{cases}D(x)=9x-12y+15\\ C(x)=(x-6)^2+(y-5)^2-3^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}D(x)=0 \Leftrightarrow 9x-12y=-15\\ C(x)=0 \Leftrightarrow (x-6)^2+(y-5)^2=9\end{cases}$$



Bien nous avons deux solutions possibles, l'une adéquate à l'être humain, l'autre adéquate à l'informatique $S_1(x;y)=\begin{pmatrix}9x-12y+15\\(x-6)^2+(y-5)^2-9\end{pmatrix} \Leftrightarrow S_2(x;y)=\begin{pmatrix}9x-12y+15\\x^2+y^2-12x-10y-52\end{pmatrix}$

Le système 1 demande d'effectuer un changement de variable en Posant $(X;Y)=\begin{pmatrix}6 & 5\end{pmatrix}$, ou inversement d'effectuer des calculs avec deux variable de la forme ay^2+by

Pour l'instant prenons la première 1ère hypothèse ou 1ère conception (= vision, idée)

$$D(x)\cap C(x)\Leftrightarrow D(x)=C(x)\Leftrightarrow\begin{cases}D(x):9x-12y=-15\\C(x):(x-6)^2+(y-5)^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}D(x):9x-12y=-15\\C(x):X^2+Y^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}D(x):y=\dfrac{9x+15}{12}\\C(x):X^2+Y^2=9\end{cases}$$

Posons :

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-6\\y-5\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}X+6\\Y+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Soit :

$$D(X)=9(X+6)-12(Y+5)+15$$
$$\Leftrightarrow D(X)=9X-12Y+54-60+15\quad\Leftrightarrow D(X)=9X-12Y+15-6$$
$$\Leftrightarrow D(X):9X-12Y=-9\qquad\Leftrightarrow D(X):Y=\frac{-9-9X}{-12}=\frac{-9(1+X)}{-12}=\frac{9(1+X)}{12}$$

D'où :

$$\begin{cases}9X-12Y=-9\\X^2+Y^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Y=\dfrac{9(1+X)}{12}\\Y^2=9-X^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Y^2=\left(\dfrac{9(X+1)}{12}\right)^2=\dfrac{81(X^2+2X+1)}{144}\\Y^2=9-X^2\end{cases}$$

Par suite :

$$\frac{81(X^2+2X+1)}{144}=9-X^2\qquad\Leftrightarrow(X^2+2X+1)=\frac{144}{81}\left(9-X^2\right)$$
$$\Leftrightarrow(X^2+2X+1)=\frac{16}{9}\left(9-X^2\right)\qquad\Leftrightarrow 9X^2+18X+9=144-16X^2$$
$$\Leftrightarrow 25X^2+18X-135=0\qquad avec\ \begin{cases}7=7.1\\18=3^2.1\\135=3^3.5.1\end{cases}$$

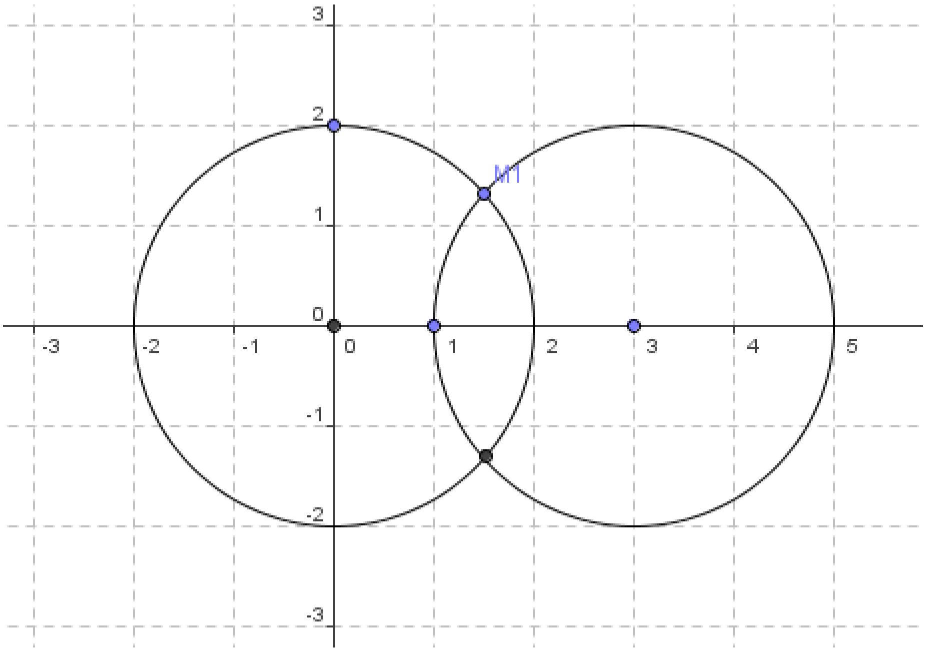
Cette équation est l'équation du second degré tel que ses solution sont, $\forall(X_1;X_2)\in\mathbb{R}$:

$$-7X^2-18X+135=0\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=b^2-4ac=(-18)^2-4(25)(-135)=324+(100\times135)=324+13500=13824=2^9.3^3\\\sqrt{2^9.3^3}=\left(2^9.3^3\right)^{1/2}=\left(2^8.3^2.2.3\right)^{1/2}=\left(2^{8/2}.3^{2/2}.6^{1/2}\right)=\left(2^4.3^1.6^{1/2}\right)=16.3\sqrt6=48\sqrt6=117,58\\\Delta>0\Rightarrow S(X)=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{-18-48\sqrt6}{50}\\\dfrac{-18+48\sqrt6}{50}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{-9-24\sqrt2}{25}\\\dfrac{-9+24\sqrt2}{25}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1,99151\\2,71151\end{pmatrix}\end{cases}$$

Et donc :

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1,99151\\2,71151\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}X+6\\Y+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X+6\\X+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1,991\,51+6\\2,711\,51+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7,99\\3,288\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}y\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{9(7,99)+15}{12}\\\dfrac{9(3,288)+15}{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7,24\\3,72\end{pmatrix}\end{cases}\Rightarrow S\begin{pmatrix}\bigcup_{i=1}^{i=2}x_i\\\bigcup_{i=1}^{i=2}y_i\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}3,29\\3,72\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}7,99\\7,24\end{pmatrix}\right)$$

Exemple numérique n° 02 :



$$\begin{cases} C_1(R)=C_1(R)=2\ ;\ O(0;0)\ ;O'(3;0) \\ \left\|\overline{OO'}\right\|=3 \\ C_1 : x^2+y^2=R^2 \\ C_2 : (x-3)^2+y^2=R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 : x^2+y^2=2^2 \\ C_2 : (x-3)^2+y^2=2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1(x)=x^2+y^2-4 \\ C_2(x)=(x-3)^2+y^2-4 \end{cases}$$

$Ors:$

$$C_2(x)=x^2-2.3x+3^2+y^2-4 \Leftrightarrow C_2(x)=x^2+y^2-6x+9-4$$

$$\Leftrightarrow C_2(x)=x^2+y^2-6x+5$$

$Soit:$

$$\begin{cases} \bigcup_{i=1}^{i=2} OM_i = C_1(x)\bigcap C_2(x) \\ C_1(x)=x^2+y^2-4 \\ C_2(x)=x^2+y^2-6x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1(x)=C_2(x) \\ x^2+y^2-4=x^2+y^2-6x+5 \end{cases} \quad Rq : \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ (x-3)^2+y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow x^2=(x-3)^2$$

$d'où:$

$$\Leftrightarrow x^2=(x-3)^2 \Leftrightarrow x^2=\pm\sqrt{(x-3)^2} \Rightarrow x^2-x^2+6x-9=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}=1,5 \Rightarrow y=P\left(\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^2+y^2-4=0 \Leftrightarrow y^2=4-\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

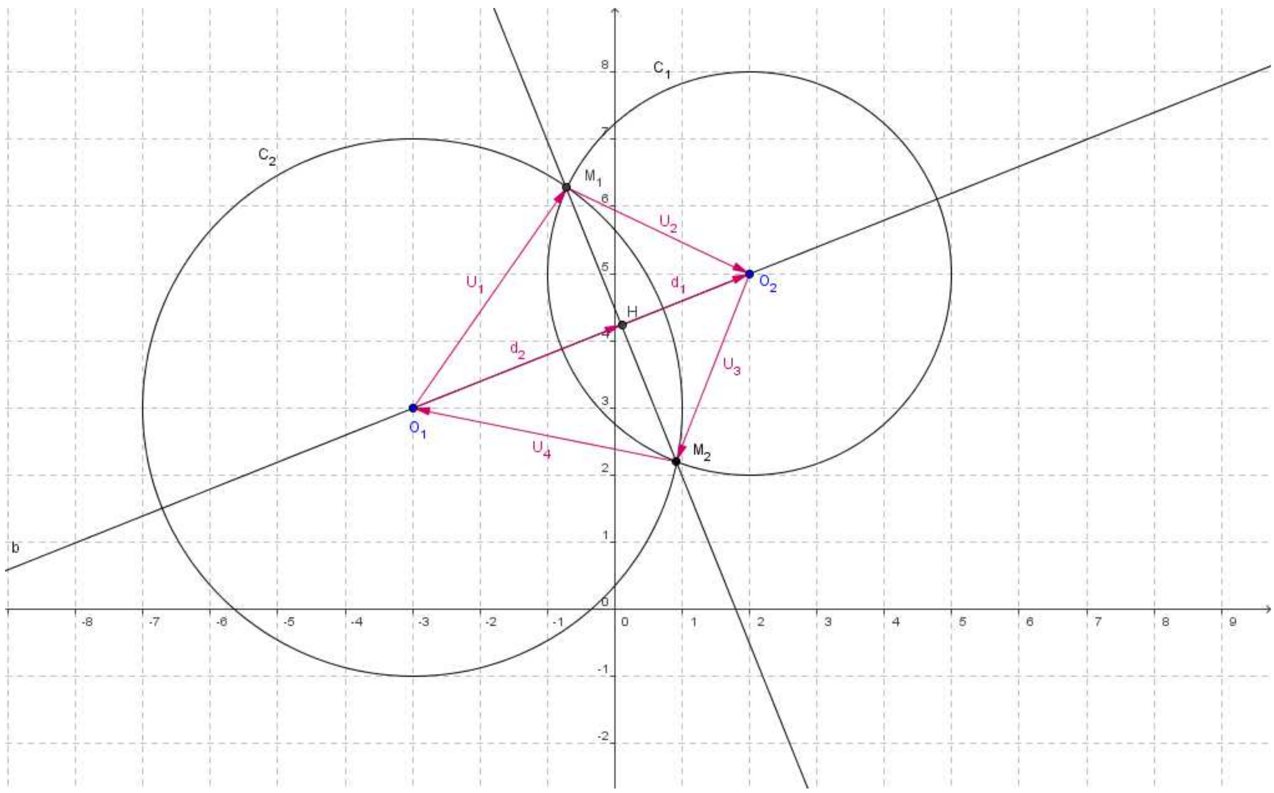
$$\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{4-\left(\frac{9}{4}\right)}=\pm\sqrt{\frac{16-9}{4}}=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}=\frac{2,645}{2}=1,32$$

$$(OM_1;OM_2)=C_1(x;y)\bigcap C_2(x;y) \Leftrightarrow (x^2+y^2-4)=(x^2+y^2-6x+5)$$

$$\Leftrightarrow (OM_1;OM_2)(x;y) \Leftrightarrow \left(x^2-(x-3)^2;x^2+y^2-4\right)=(0;0) \Rightarrow (OM_1;OM_2)\left(\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{7}}{2}\right);\left(\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\right)$$

Exemple numérique 04 : Intersection de deux cercles désaxée

Intersection de cercles, médiatrices, vecteurs,



No.	Nom	Définition	Commande	Algèbre
1	Point O_1			$O_1 = (-3, 3)$
2	Point O_2			$O_2 = (2, 5)$
3	Droite b	Droite passant par O_1, O_2	Droite[O_1, O_2]	b: $-2x + 5y = 21$
4	Cercle C_1			C_1: $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 9$
5	Cercle C_2			C_2: $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 16$
6	Point M_1	point d'intersection de C_1, C_2	Intersection[C_1, C_2, 2]	$M_1 = (-0.71, 6.28)$
7	Droite a	Droite passant par M_1 perpendiculaire à b	Perpendiculaire[M_1, b]	a: $-5x - 2y = -9$
8	Point M_2	Point sur C_1	Point[C_1]	$M_2 = (0.91, 2.2)$
9	Point H	point d'intersection de b, a	Intersection[b, a]	$H = (0.1, 4.24)$
10	Vecteur U_1	Vecteur[O_1, M_1]	Vecteur[O_1, M_1]	$U_1 = (4; 55.12°)$
11	Vecteur U_2	Vecteur[M_1, O_2]	Vecteur[M_1, O_2]	$U_2 = (3; 334.71°)$
12	Vecteur U_3	Vecteur[O_2, M_2]	Vecteur[O_2, M_2]	$U_3 = (3; 248.78°)$
13	Vecteur U_4	Vecteur[M_2, O_1]	Vecteur[M_2, O_1]	$U_4 = (3.99; 168.5°)$
14	Vecteur d_1	Vecteur[H, O_2]	Vecteur[H, O_2]	$d_1 = (2.04; 21.8°)$
15	Vecteur d_2	Vecteur[O_1, H]	Vecteur[O_1, H]	$d_2 = (3.34; 21.8°)$

Scripturalement :

$$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2,\exists\,(S_1)=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}(x-2)^2+(y-5)^2\\(x+3)^2+(y-3)^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3^2\\4^2\end{pmatrix}=0$$

Effectuons un changement de variable

$$\begin{cases}X=(x+3)\\Y=(y-3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=(X-3)\\y=(Y+3)\end{cases}$$

Soit le système S1 s'écrit :

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}E01\\E02\end{pmatrix}=0 \qquad \Leftrightarrow\begin{pmatrix}(X-5)^2+(y-2)^2\\X^2+Y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\16\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}E10\\E20\end{pmatrix}=0 \qquad \Leftrightarrow\begin{pmatrix}X^2+Y^2-10X-4Y\\X^2+Y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-20\\16\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}E11\\E21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(E10-E20)^2\\E20\end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow\begin{pmatrix}(4Y)^2\\(4Y)^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-36+10X)^2\\4^2(16-X^2)\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}E12\\E22\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E11^2\\E2\times E11^2\end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow\begin{pmatrix}16Y^2\\16Y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}900\\360\\36\end{pmatrix}-2(36)10X+100X\\\begin{pmatrix}100\\120\\36\end{pmatrix}-16X^2\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}E13\\E23\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E12\\E22\end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow\begin{pmatrix}16Y^2\\16Y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1296-720X+100X\\256\qquad-16X^2\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow E24=E23-E13 \qquad \Leftrightarrow\quad 0 \quad=\quad 1040-720X+116X$$

$$\Leftrightarrow E25=E24\div p\,\text{gcd}\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{12}\\a_{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X^0\\X^1\\X^2\end{pmatrix}^t \Leftrightarrow\begin{pmatrix}1040\\-720X\\116X^2\end{pmatrix}\div4=\begin{pmatrix}260\\-180\\29\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}2;24;00\\1;32;00\\2;3;36\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow E25=0 \qquad \Leftrightarrow 29X-180X+260=0$$

L'équation E25 est du second degré, déterminons son discriminant et son signe :

$$\Delta=(100+80)^2-4\begin{pmatrix}20\\9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}200\\60\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\Delta=(10\,000+16\,000+6\,400)-4\begin{pmatrix}4000\\1200\\1800\\540\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\Delta=32400-4\left(7540\right)$$

$$\Leftrightarrow\Delta=32400-30160$$

$$\Leftrightarrow\Delta=2240$$

Delta est positif, donc il existe deux solutions. Quand à la division effectuons là sur ordinateur pour l'instant. Résultat informatique (sachant que les cercles ne seraient pas tous résolvables d'après Internet et scientifique) :

Système d'équation de deux cercles

{ (	x²	+	-2)	+	(	y²	+	-5	)	+	=	3	²						
(	x²	+	3)	+	(	y²	+	-3	)	+	=	4	²						
{ (	X	=	x	+	3)	²	⇔	(	x	=	X	+	-3)	²					
(	Y	=	x	+	-3)	²	⇔	(	x	=	Y	+	3)	²					
{ (	X	+	-3	+	-2)	²	+	(	Y²	+	3	+	-5)	²	=	9			
(	X	+	-3	+	3)	²	+	(	Y²	+	3	+	-3)	²	=	16			
{ (	X	+	-5)	²	+ (	Y²	+	-2)	=	9									
(	X	+	0)	²	+ (	Y²	+	0)	=	16									
{ (	X	+	-10	X	+	25)	+	(	Y²	+	-4	Y	+	4)	=	9			
(	X	+	0	X	+	0)	+	(	Y²	+	0	Y	+	0)	=	16			
{ (	X	+	-10	X	+	0)	+	(	Y²	+	-4	Y	+	0)	=	-20			
(	X	+	0	X	+	0)	+	(	Y²	+	0	Y	+	0)	=	16			

-10	X	+	-4	Y	=	-36						
			-4	Y	=	-36	+	10	X			
			16	Y²	=	1296	+	-720	X	+	100	X²
				Y²	=	16				+	-1	X²
			16	Y²	=	256				+	-16	X²
			0	Y²	=	1040	+	-720	X	+	116	X²
	4		0	Y²	=	260	+	-180	X	+	29	X²
			32	Y²	=	1552	+	-720	X	+	84	X²
						48,5		-22,5			2,625	

Y	=	29	x²	+	-180	X	+	260

soustraction			
Δ =	32400	4	7540
	32400		30160
Δ =			2240
			-2240
√ Δ =			47,3286383
√ Δ =			#NOMBRE!

Addtions				R	C
	506,25	4	127,3125		
	506,25		509,25	Ø	5,21907216
			-3		0,07142478
			3		
			#NOMBRE!		
√ Δ =			1,73205081		
racine (3)			1,73205081		

Soustraction

180 + 47,3286383	/ 58	227,328638	/ 58	3,91945928	3	0,91945928
180 + -47,328638	/ 58	132,671362	/ 58	2,28743727	3	-0,71256273

Soustraction

-10 X	+	-4 Y	=	-36							valeur absolue
Y	=	-36 / 4	+	10 / 4	3,91945928	=	3,195 / 4	=	0,799	-3	2,2013518
Y	=	-36 / 4	+	10 / 4	2,287437271	=	-13,1 / 4	=	-3,28	-3	6,28140682

M1	=	3,9195	;	2,2013518	
M2		2,2874	;	6,28140682	

Système de deux équations de cercles avec changement de référentiel et de repère

Bien, ce n'est qu'une première ébauche, soit une non spécialisation. Par conséquent, on va prendre toutes les mesures de précaution qui s'impose. Je vais prendre la méthode universelle, d'ailleurs celle du cinéma, dans les astéroïdes, on déplacera le repère jusqu'à ce que les cercles soient représentés dans le premier quart de cercle. Il se pourrait qu'il existerait des problèmes de résolution si les coordonnées se retrouvaient dans l'axe négatif.

Système d'équation de deux cercles

	C1 ((	2	5)	3)			C2 ((	-3	3)	4)				(-3	3	4)		
	B' (	-8	-2)				B' (	-8	-2)					(x;y)=(1	1)			
	C' 1 ((10		7)	3)			C' 2 ((	5	5)	4)				B' (8	2)			
{ (	x	–	10)²		+ (	y	–	7)²		=	3²							
(	x	–	5)²		+ (	y	–	5)²		=	4²							
{ (	x	+	-10)²		+ (	y	+	-7)²		=	3²							
(	x	+	-5)²		+ (	y	+	-5)²		=	4²							
{ (	X	=	x	+	-5)²		⇔	(x	=	X	+	5)²						
(	Y	=	y	+	-5)²		⇔	(y	=	Y	+	5)²						
{ (	X	+	5	+	-10)²		+	(Y²	+	5	+	-7)²		=	9			
(	X	+	5	+	-5)²		+	(Y²	+	5	+	-5)²		=	16			
{ (	X	–	-5)²		+ (	Y²	+	-2)		=	9							
(	X	+	0)²		+ (	Y²	+	0)		=	16							
{ (	X	+	-10	X	+	25)	+	(Y²	+	-4	Y	+	4)	=	9			
(	X	+	0	X	+	0)	+	(Y²	+	0	Y	+	0)	=	16			
{ (	X	+	-10	X	+	0)	+	(Y²	+	-4	Y	+	0)	=	-20			
(	X	+	0	X	+	0)	+	(Y²	+	0	Y	+	0)	=	16			
-10	X	+	-4	Y	=	-36												
			-4	Y	=	-36	+	10	X						2	2		
			16	Y²	=	1296	+	-720	X	+	100	X²			-36	-360		
				Y²	=	16				+	-1	X²			10	-720		
			16	Y²	=	256				+	-16	X²						
			0	Y²	=	1040	+	-720	X	+	116	X²						
			0	Y²	=	260	+	-180	X	+	29	X²			4			
		Y	=	29	x²	+	-180	X	+	260								

	soustraction		
Δ =	32400	4	7540
	32400		30160
Δ =			2240
			-2240
√ Δ =			47,329
√ Δ' =			######

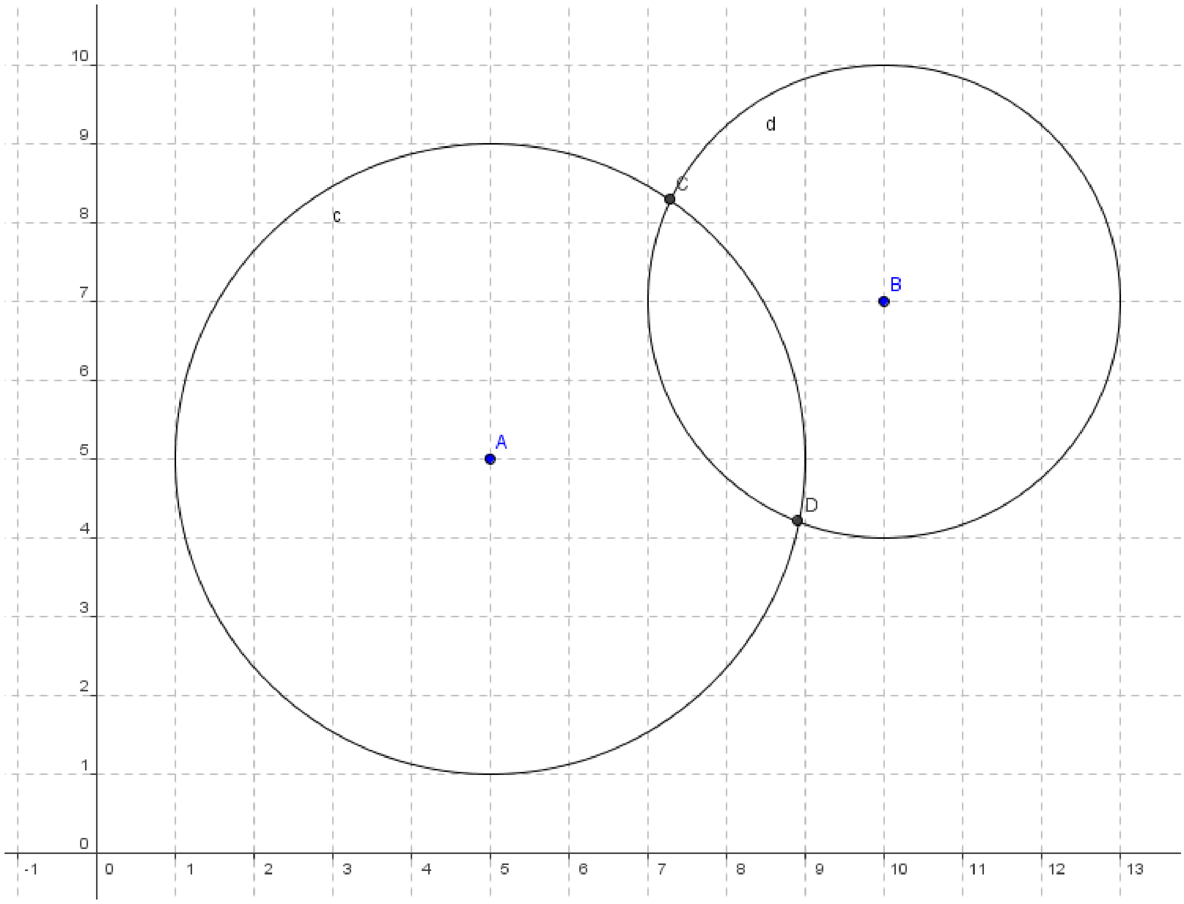
Soustraction

$\frac{180 + 47{,}3286383}{58}$		$\frac{227{,}328638}{58}$	3,91945928	5	8,91945928	
$\frac{180 + -47{,}328638}{58}$		$\frac{132{,}671362}{58}$	2,28743727	5	7,28743727	

Soustraction

-10 X	+	-4 Y	=	-36					valeur absolue	
Y	=	$\frac{-36}{-4}$ + $\frac{10}{-4}$	3,91945928	9	-9,8	=	-0,8	5	4,2013518	
Y	=	$\frac{-36}{-4}$ + $\frac{10}{-4}$	2,287437271	9	-5,72	=	3,281	5	8,28140682	

$$\begin{pmatrix} M1 & M2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8{,}9195 & ; & 4{,}2013518 \\ 7{,}2874 & ; & 8{,}28140682 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} -8 & -2 \\ -8 & -2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} (0{,}91945928 & ; & -0{,}71256273) \\ (2{,}2013518 & ; & 6{,}28140682) \end{pmatrix}$$


A
B
C
D
c
d

Programme informatique rapide (non testé sur plusieurs valeurs numérique) :

Changement de (référentiel;base):R (O;i;j)=R'(O';αi;βj); $(X;Y)=(x+a;y+b)\Leftrightarrow(x;y)=(X-a;Y-b)$

$$-2(y_b-y_a)Y=\left[-2(x_b-x_a)X+\left(r_a^2-(y_b-y_a)^2-(x_b-x_a)^2-r_b^2\right)\right]$$

$$\begin{pmatrix} 4\left[(x_b-x_a)^2-(y_b-y_a)^2\right]X^2 \\ -2\left(2(x_b-x_a)\left[\left(r_a^2-r_b^2-(y_b-y_a)^2-(x_b-x_a)^2\right)\right]\right)X \\ \left[\left(r_a^2-r_b^2-(y_b-y_a)^2-(x_b-x_a)^2\right)\right]^2-\left(4(y_b-y_a)\right)^2 r_b^2 \end{pmatrix}^+ =0\Leftrightarrow\begin{pmatrix} AX^2 \\ BX \\ K \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{cases} (X_1;X_2)=\dfrac{-(-4(x_{ba})K)\pm\sqrt{4^2(x_{ba}K^2-(x_{ba}^2+y_{ba}^2)(K^2-4y_{ba}^2r_b^2))}}{2.4(x_{ba}^2+y_{ba})^2}=\dfrac{x_{ba}K\pm\sqrt{(4(x_{ba}^2y_{ba}^2r_b^2+y_{ba}^4r_b^2)-(y_{ba}^2k^2)}}{2(x_{ba}^2+y_{ba}^2)} \\ (Y_1;Y_2)=Y=\dfrac{-2(x_b-x_a)}{2(y_b-y_a)}X+\dfrac{r_a^2-r_b^2-(y_b-y_a)^2-(x_b-x_a)^2}{2(y_b-y_a)}\Leftrightarrow Y=-\dfrac{(x_b-x_a)}{(y_b-y_a)}X+\dfrac{k}{2(y_b-y_a)} \end{cases}$$

	A	B	C	D	E	F
1		2	5	3		
2		-3	3	4		
3		=B2-B1	=C2-C1	=D2-D1		
4						
5		=SI(D2>D1;B2;B1)	=SI(D2>D1;C2;C1)	=SI(D2>D1;D2;D1)		
6		1	1			
7		=-(D5-B5+B6)	=-(D5-C5+C6)	0		
8						
9		=B1-B7	=C1-C7	=D1-D7		
10		=B2-B7	=C2-C7	=D2-D7		
11		=x_b-x_a	=y_b-y_a	=r_a^2-r_b^2		
12						
13	k_1 =		=r_a^2-r_b^2-(y_ba)^2-(x_ba)^2		=(k_1)/(2*(y_b-y_a))	
14	=delta&" = "		=(x_ba^2*k_1^2)-(x_ba^2+y_ba^2)*((k_1^2)-(4*y_ba^2*r_b^2))			
15	=A14		=(4*((x_ba^2*y_ba^2*r_b^2)+(y_ba^4*r_b^2)))-(y_ba^2*k_1^2)			
16	=racdelta&" = "		=RACINE(C14)			
17			=((x_ba*k_1)+RACINE(C14))/(2*(x_ba^2+y_ba^2))	=x_b	=i_1	=C17+D17+E17
18			=((x_ba*k_1)-RACINE(C14))/(2*(x_ba^2+y_ba^2))	=D17	=E17	=C18+D18+E18
19						
20			=((-x_ba/y_ba)*C17)+(k_1/(2*y_ba))	=y_b	=j_1	=C20+D20+E20
21			=((-x_ba/y_ba)*C18)+(k_1/(2*y_ba))	=D20	=E20	=C21+D21+E21
22						

	2	5	3		
	-3	3	4		
	-5	-2	1		
	-3	3	4		
	1	1			
	-8	-2	0		
	10	7	3		
	5	5	4		
	-5	-2	-7		
k_1 =		-36		9	
Δ =		2240			
Δ =		2240			
(Δ) =	47,33				
	3,919	5		-8	0,91945928
	2,287	5		-8	-0,71256273
	-0,8	5		-2	2,2013518
	3,281	5		-2	6,28140682

Bien, en 2008 un jeune a posé la question comment trouver le point commun de trois cercles, bien qu'on lui a répondu partiellement à sa question. Soit, d'autres jeunes doivent se poser ce genre de question. Je vais vous y répondre rapidement, On va supposer qu'il est dans le premier quart de cercle. Soit comme le système d'équation (3;2) amenant 3 droites sécantes 2 à 2, on va résoudre de la même manière, tout le monde en parle mais personne ne la montre :

$$\left|\begin{array}{l}\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2;\exists\,\Re(O;\vec{i};\vec{j})\\ \forall\begin{cases}C_1(x_a;y_a)\in\mathbb{R}^2\\ C_2(x_b;y_b)\in\mathbb{R}^2\\ C_3(x_c;y_c)\in\mathbb{R}^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{cases}(x-x_a)^2+(y-y_a)=r_a^{\,2}\\(x-x_b)^2+(y-y_b)=r_b^{\,2}\end{cases}\\ \begin{cases}(x-x_a)^2+(y-y_a)=r_a^{\,2}\\(x-x_c)^2+(y-y_c)=r_c^{\,2}\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2+2x_ax+x_a^{\,2})+(y^2+2y_ay+y_a^{\,2})=r_a^{\,2}\\(x^2+2x_bx+x_b^{\,2})+(y^2+2y_by+y_b^{\,2})=r_b^{\,2}\\(x^2+2x_cx+x_c^{\,2})+(y^2+2y_cy+y_c^{\,2})=r_c^{\,2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\begin{cases}\left(X+(x_b-x_a)\right)^2+(Y+(y_b-y_a))^2=r_a^{\,2}\\(X+x_b-x_b)^2+(Y+y_b-y_b)=r_b^{\,2}\end{cases}\\ \begin{cases}\left(X+(x_b-x_a)\right)^2+(Y+(y_b-y_a))^2=r_a^{\,2}\\(X+x_c-x_c)^2+(Y+y_c-y_c)=r_c^{\,2}\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{cases}\left(X+(x_b-x_a)\right)^2+(Y+y_b-y_a)^2=r_a^{\,2}\\X^2+Y^2=r_b^{\,2}\Leftrightarrow Y^2=r_b^{\,2}-X^2\end{cases}\\ \begin{cases}\left(X+(x_c-x_a)\right)^2+(Y+y_c-y_a)^2=r_a^{\,2}\\X^2+Y^2=r_c^{\,2}\Leftrightarrow Y^2=r_c^{\,2}-X^2\end{cases}\end{cases}$$

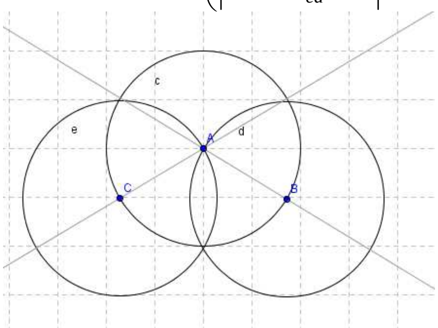
$$\Leftrightarrow\begin{cases}r_b^{\,2}-X^2=\left(\dfrac{\left(-2x_{ba}X-\left(r_b^{\,2}-r_a^{\,2}+y_{ba}^{\,2}+x_{ba}^{\,2}\right)\right)^2}{-2^2y_{ba}^{\,2}}\right)\\ r_c^{\,2}-X^2=\left(\dfrac{\left(-2x_{ca}X-\left(r_c^{\,2}-r_a^{\,2}+y_{ca}^{\,2}+x_{ca}^{\,2}\right)\right)^2}{-2^2y_{ca}^{\,2}}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(b_1Y)^2=(a_1X+c_1)^2\Leftrightarrow b_1^{\,2}Y^2=a_1^{\,2}X^2+2a_1c_1X+c_1^{\,2}\\(b_2Y)^2=(a_2X+c_2)^2\Leftrightarrow b_2^{\,2}Y^2=a_2^{\,2}X^2+2a_2c_2X+c_2^{\,2}\end{cases}$$

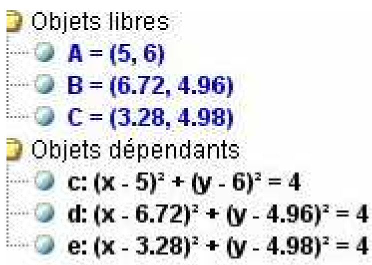
$$avec\ \left|\begin{array}{l}k_{ji}=(k_{ba};k_{ca})=((r_a^{\,2}-r_b^{\,2}-y_{ba}^{\,2}+x_{ba}^{\,2});(r_a^{\,2}-r_c^{\,2}-y_{ca}^{\,2}+x_{ca}-x_{ca})^2)\\(B_{ji};\Delta_{ji})=(-4(x_{ji}r_i^{\,2}-r_j^{\,2}-y_{ji}^{\,2}-x_{ji}^{\,2})\ ;\ (4^2x_{ji}k^2-4^2(x_{ji}^{\,2}+y_{ji}^{\,2})(k^2-4y_{ji}^{\,2}r_b^{\,2}))\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4(x_{ba}^{\,2}-y_{ba}^{\,2})X^2-(4x_{ba}k_{ca})X+(k_{ba}-4^2y_{ba}^{\,2}r_b^{\,2})=0\\4(x_{ba}^{\,2}-y_{ba}^{\,2})X^2-(4x_{ba}k_{ca})X+(k_{ca}-4^2y_{ca}^{\,2}r_c^{\,2})=0\end{cases}\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}AX^2+BX+C\\\Delta=x_{ji}K^2-(x_{ji}^{\,2}+y_{ji}^{\,2})(K^2-4y_{ji}^{\,2}r_b^{\,2})\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(X_1;X_2)=\dfrac{x_{ji}K_{ji}\pm\sqrt{x_{ji}K_{ji}^{\,2}-(x_{ji}^{\,2}+y_{ji}^{\,2})(K^2-4y_{ji}^{\,2}r_b^{\,2})}}{2(x_{ji}^{\,2}+y_{ji}^{\,2})}\\(Y_1;Y_2)=-\dfrac{2x_{ji}}{2y_{ji}}\left(\dfrac{(x_{ji})k\pm\sqrt{x_{ji}K_{ji}^{\,2}-(x_{ji}^{\,2}+y_{ji}^{\,2})(K_{ji}^{\,2}-4y_{ji}^{\,2}r_b^{\,2})}}{2(x_{ji}^{\,2}+y_{ji}^{\,2})}\right)+\dfrac{K_{ij}}{2y_{ji}}\end{cases}\ où\ \left|\begin{array}{l}ji=(ba;ca)=b-a;c-a\\x_{ji}=(x_b-x_a;x_c-x_a)\\y_{ji}=(y_b-x_a;y_c-y_a)\\k_{ji}=k_{ba};k_{ca}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=\left(\begin{array}{l}\left|\dfrac{-B_{ba}+\sqrt{\Delta_{ba}}}{2A_{ba}}\right|-e_{x;AO'}\\\left|\dfrac{-B_{ca}-\sqrt{\Delta_{ca}}}{2A_{ca}}\right|-e_{x;AO'}\end{array}\right)-e;x_{o'o};\left(\left(\left(\begin{array}{l}(-\dfrac{2x_{ji}}{2y_{ji}}(X_1;X_2)\\-\dfrac{\left(r_j^{\,2}-r_i^{\,2}-x_{ji}^{\,2}-y_{ji}^{\,2}\right)}{2y_{ji}}\end{array}\right)^+-e_{y;AO'}\right)-e_{y;oo'}\right)$$





Bien, on redescend sur terre, il y a plus simple : 1 cercle sur un des deux axes avec inter coté positif quand au tangente : Niveau 3ème, 2de, 1ère par les symétries, les rotations, le produit scalaire, l'orthogonale, la normale, Les cercles d'Euler (exp complexe) ect. Nous reverrons tous cela dans ces chapitres

Bien en même temps cette formule est universelle puisque $e_{y;oo'} = 0 \ ou \ e_{y;oo'} = k$

6) Polynôme trigonométrique usuelle du cercle ou cercle développée

le cercle étant défini sur $[0;2\pi]$, on a crée la développante du cercle tel que sur l'axe des abscisses, on a les valeur en radians ou en cm et sur l'axe des ordonnées, on a les valeurs en cm, tel que :

$y = \sin(x)$

Représentation Graphique

$y = \cos(x)$

Représentation Graphique

$y = \tan(x)$

Représentation Graphique

7) Différentielles des fonctions trigonométriques usuelles

7.1) Différentielles de f(x) = cos (x) ; (1ère C)

a) Détermination de la Dérivée

Il vient que par définition des fonctions dérivées et différentielles que :

$$f(x)=\cos(x) \Rightarrow f'(x)=\underset{\Delta x\to 0}{Lim}\ \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\underset{\Delta x\to 0}{Lim}\ \frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x}$$

Ors cette fonction est inexploitable sous cette forme, mais des formules trigonométriques, posons :

$$\begin{cases}\cos(a+b)=\cos(a).\cos(b)-\sin(a).\sin(b)\\ \cos(a-b)=\cos(a).\cos(b)+\sin(a).\sin(b)\end{cases} avecavec \begin{cases}a=x+\Delta x\\ b=x\end{cases}\begin{cases}a+b=2x+\Delta x\\ a-b=\Delta x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a=2x+\Delta x\\ 2b=\Delta x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=x+\dfrac{\Delta x}{2}\\ b=\dfrac{\Delta x}{2}\end{cases}$$

$$\cos(p)-\cos(q)=\cos(a+b)-\cos(a-b)\ =\ -2\sin(a).\sin(b)\quad =-2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x}=\frac{-2\sin(x+\frac{\Delta x}{2}).\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}\qquad où\ \begin{cases}q=x+\Delta x\\ p=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{p+q}{2}=\dfrac{2x+\Delta x}{2}=x+\dfrac{\Delta x}{2}\\ \dfrac{p-q}{2}=\dfrac{\Delta x}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\frac{1}{2}\Delta x}=\frac{-\left(\frac{1}{2}\right)2\sin(x+\frac{\Delta x}{2}).\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x}=\frac{-\sin(x+\frac{\Delta x}{2}).\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \underset{\Delta x\to 0}{Lim}\ \frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x}=\underset{\Delta x\to 0}{Lim}\ \frac{-\sin(x+\frac{\Delta x}{2}).\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \underset{\Delta x\to 0}{Lim}\ \frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x}=\underset{\Delta x\to 0}{Lim}\ \left(-\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\times\frac{\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \underset{\Delta x\to 0}{Lim}\ \frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x}=\left(\underset{\Delta x\to 0}{Lim}\ -\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\right)\times\left(\underset{\Delta x\to 0}{Lim}\ \frac{\sin(X)}{X}\right);où\ X=\frac{\Delta x}{2}$$

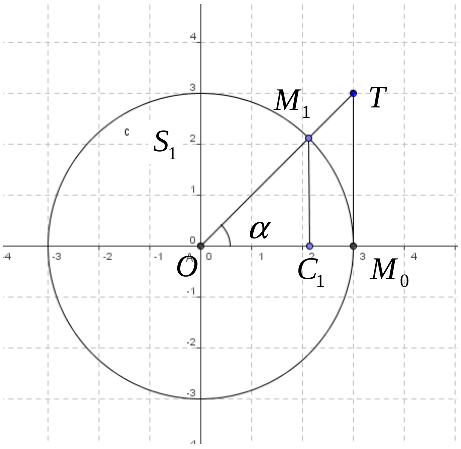
Ors :

$$\left(\underset{\Delta x\to 0}{Lim}\ -\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\right)=-\sin(x)\ \text{ et }\ \left(\underset{\Delta x\to 0}{Lim}\ \frac{\sin(X)}{X}\right)=\frac{0}{0}=Forme\,\text{indéterminé}$$

Il nous faut donc lever l'indéterminé de la limite de $\dfrac{\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}}$ Soit : $\dfrac{\sin(X)}{X}$, quand $\Delta x\to 0$

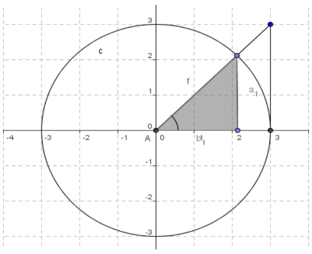
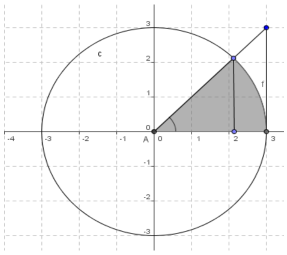
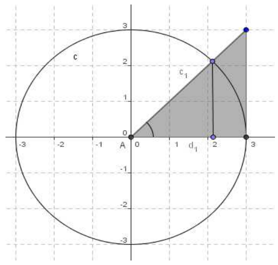
b) détermination de l'indéterminé sin (x) / (x) (1ère C) ; (**[Démonstration de Serge Mehl, Perso orange]**)

Ors en trigonométrie, des secteurs d'aires, on a :



$$\textit{Sachant que}\begin{cases}\text{Aire triangle}:\dfrac{\text{Longueur}\times\text{Largeur}}{2}\\ \text{Aire secteur}:\dfrac{\alpha\ r^2}{2}\\ C_1M_1 = OS_1 = \sin(\alpha)\ ;\\ OM_i = OM_o = OM_1 = R = 1\end{cases}$$

et que :

 $<$  $<$ 

Aire du triangle OC_1S_1 < Aire du secteur *OAE* < Aire du triangle OAT

$$A_{OC_1S_1} < A_{\widehat{OM_0M_1}} < A_{OM_0S_T}$$

$$\Leftrightarrow \frac{OC_1\times C_1M_1}{2} < \frac{\alpha\ r^2}{2} < \frac{OM_0\times M_0T}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos(\alpha)\times\sin(\alpha)}{2} < \frac{\alpha\ (1)^2}{2} < \frac{R\times\tan(\alpha)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin(\alpha)}\times\frac{\cos(\alpha)\times\sin(\alpha)}{2} < \frac{2}{\sin(\alpha)}\times\frac{\alpha}{2} < \frac{2}{\sin(\alpha)}\left(\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha) < \frac{\alpha}{\sin(\alpha)} < \frac{1}{\sin(\alpha)}\times\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\alpha\to 0}\ \cos(\alpha) < \lim_{\alpha\to 0}\ \frac{\alpha}{\sin(\alpha)} < \lim_{\alpha\to 0}\ \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow 1 < \lim_{\alpha\to 0}\ \frac{\alpha}{\sin(\alpha)} < 1$$

Comme : $\lim\limits_{\alpha\to 0}\ \dfrac{\alpha}{\sin(\alpha)} = 1\ ;\ \lim\limits_{\alpha\to 0}\ \dfrac{1}{\dfrac{\alpha}{\sin(\alpha)}} = \dfrac{1}{1} \Leftrightarrow \lim\limits_{\alpha\to 0}\left|\times\dfrac{\dfrac{1}{1}}{\dfrac{\alpha}{\sin(\alpha)}}\right| = \dfrac{1}{1}$ *De* $\dfrac{\dfrac{a}{b} = 1 = \dfrac{1}{1}}{\dfrac{c}{d} = \dfrac{\alpha}{\sin(\alpha)} = 1 = \dfrac{1}{1}} = \dfrac{a}{b}\times\dfrac{d}{c} = \dfrac{1}{1}\times\dfrac{\sin(\alpha)}{\alpha}$

Donc $\boxed{\lim\limits_{\alpha\to 0}\ \dfrac{\sin(\alpha)}{\alpha} = 1}$

[Ce théorème est encore appelé théorème de Sandwich]

Il vient donc :

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} -\sin(x+\frac{\Delta x}{2}) \times \frac{\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} -\sin(x+\frac{\Delta x}{2}) \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(X)}{X} \quad où\ X = \frac{\Delta x}{2}$$

Tel que :

$$\begin{cases} \lim_{\Delta x \to 0} -\sin(x+\frac{\Delta x}{2}) = -\sin(x) \\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(X)}{X} = 1 \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}} = 1 \end{cases}$$

Par suite :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(-\sin(x+\frac{\Delta x}{2}) \times \frac{\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x} = -\sin(x) \times 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x} = -\sin(x)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = -\sin(x) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\sin(x) \Leftrightarrow dy = -\sin(x)\,dx$$

Donc :

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x) \\ Ou \\ y = \cos(x) \Rightarrow dy = -\sin(x)\,dx \end{array}}$$

7.2) Différentielles de f(x) = sin (x) ; (1ère C)

a) Démonstration 1 :

Il vient que par définition des fonctions dérivées et différentielles que :

$$f(x)=\sin(x) \Rightarrow f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$Soit\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin(x)}{\Delta x}$$

Ors cette fonction est inexploitable sous cette forme, mais des formules trigonométriques, posons :

$$\begin{cases} Sin(a+b)=\sin(a).\cos(b)+\cos(a).\sin(b) \\ Sin(a-b)=\sin(a).\cos(b)-\cos(a).\sin(b) \end{cases} avec \begin{cases} (a+b)=x+\Delta x \\ (a-b)=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=2x+\Delta x \\ 2b=\Delta x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=x+\dfrac{\Delta x}{2} \\ b=\dfrac{\Delta x}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin(a+b)-\sin(a-b)=-2\sin(a).\cos(b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin(x)}{\Delta x}=\frac{2\cos(x+\frac{\Delta x}{2}).\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} \qquad où \begin{cases} p=x+\Delta x \\ q=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{p+q}{2}=\dfrac{2x+\Delta x}{2}=x+\dfrac{\Delta x}{2} \\ \dfrac{p-q}{2}=\dfrac{\Delta x}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}\sin(x+\Delta x)-\sin(x)}{\frac{1}{2}\Delta x}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(2\cos(x+\frac{\Delta x}{2}).\sin(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin(x)}{\Delta x}=\frac{\cos(x+\frac{\Delta x}{2}).\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\frac{\Delta x}{2}).\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\times\frac{\sin(\frac{\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x}{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x}=\left(\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\right)\times\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(X)}{X}\right);où\ X=\frac{\Delta x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x}=(\cos(x))\times(1)$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\cos(x) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\cos(x) \Leftrightarrow dy=\cos(x)\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x)=\sin(x) \Rightarrow f'(x)=\cos(x) \\ Ou \\ y=\sin(x) \Rightarrow dy=\cos(x)\,dx \end{array}}$$

b) Démonstration scolaire

$$f(x)=\sin(x)$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{[\sin(x+h)]-\sin(x)}{h}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{[\sin(x)\cos(h)+\sin(h)\cos(x)]-\sin(x)}{h}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{[\sin(x)\cos(h)-\sin(x)]+\sin(h)\cos(x)}{h}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sin(x)[\cos(h)-1]\cos(h)}{h}+\frac{\sin(x)\cos(x)}{h}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{h}=\left(\frac{[\cos(h)-1]}{h}\right)\sin(x)\cos(\Delta x)+\frac{\sin(x)}{h}\cos(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\frac{\cos(h)+1}{\cos(h)+1}\right)\sin(x)\cos(\Delta x)+\frac{\sin(x)}{\Delta x}\cos(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\left(\frac{[\cos(h)]^2-1}{h\cos(h)+1}\right)\sin(x)\cos(\Delta x)+\frac{\sin(x)}{h}\cos(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\left(\left(-\frac{[\sin(h)]^2}{h\cos(h)+1}\right)\right)\sin(x)\cos(\Delta x)+\frac{\sin(x)}{h}\cos(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\left(\left(-\frac{\sin^2(h)}{h\cos(h)+1}\right)\right)\sin(x)\cos(\Delta x)+\frac{\sin(x)}{h}\cos(x)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\left(-\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\frac{\sin(\Delta x)}{\cos(\Delta x)+1}\right)\right)\left(\sin(x)\cos(\Delta x)\right)+\left(\frac{\sin(x)}{\Delta x}\cos(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\left(-0.\frac{0}{1}\right)\sin(x)(1)+(1)\cos(x)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\cos(x)$$

7.3) Fonctions différentielles et dérivée de tan (x).

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{U}{V}$$

a) dérivation générale des fonctions trigonométriques rationnelles usuelle

$$\begin{cases} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{\tan(x+h)-\tan(x)}{h} = \dfrac{1}{h}\left[\tan(x+h)-\tan(x)\right] \\ \tan(x+h) = \dfrac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} = \dfrac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\cos(h)}{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)} = \dfrac{\tan(x)+\tan(h)}{1-\tan(x)\tan(h)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{\tan(x)+\tan(h)}{1-\tan(x)\tan(h)} - \tan(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{\tan(x)+\tan(h)}{[1-\tan(x)\tan(h)]} - \frac{\tan(x)[1-\tan(x)\tan(h)]}{[1-\tan(x)\tan(h)]}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{h}\,\frac{\cancel{\tan(x)}+\tan(h)-\cancel{\tan(x)}+\tan^2(x)\tan(h)]}{[1-\tan(x)\tan(h)]}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{h}\,\frac{\tan(h)[1+\tan^2(x)]}{[1-\tan(x)\tan(h)]}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\tan(h)}{h}\left(\frac{[1+\tan^2(x)]}{1-\tan(x)\tan(h)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{h}\,\frac{\sin(h)}{\cos(h)}\left(\frac{[1+\tan^2(x)]}{1-\tan(x)\tan(h)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \left(\frac{1}{\cos(h)}\bullet\frac{\sin(h)}{h}\right)\left(\frac{[1+\tan^2(x)]}{[1-\tan(x)\tan(h)]}\right)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\cos(\Delta x)}\bullet\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\right)\left(\frac{[1+\tan^2(x)]}{[1-\tan(x)\dfrac{\sin(\Delta x)}{\cos(\Delta x)}]}\right) \quad avec \lim_{\Delta x\to 0}\Delta x = h$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \left(\frac{1}{1}\bullet 1\right)\left(\frac{[1+\tan^2(x)]}{1-\tan(x)\dfrac{0}{1}}\right) = 1\left(\frac{1+\tan^2(x)}{1-\tan(x)(0)}\right) = \frac{1+\tan^2(x)}{1-0} = 1+\tan^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 1+\tan^2(x) \\ \begin{cases} \sin^2(x)+\cos^2(x) = 1 \\ \tan^2(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 1+\dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ 1+\dfrac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = 1+\left(\dfrac{1}{\cos^2(x)}-\dfrac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)}\right) = 1+\left(\dfrac{1}{\cos^2(x)}-1\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} f'(x) = 1+\tan^2(x) \\ f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} \end{cases}}$$

b) <u>dérivation des fonctions trigonométrique rationnelles :</u>

$$f(x)=\frac{U}{V}\Rightarrow f'(x)=\frac{U'V-UV'}{V^2}$$

$$\text{Ors }\begin{cases}U=\sin(x)\Rightarrow U'=-\cos(x)\\ V=\cos(x)\Rightarrow V'=\sin(x)\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$f'(x)=\frac{\sin(x)[\cos(x)]'-\left([\sin(x)]'\cos(x)\right)}{[\cos(x)]^2}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{\sin(x)\sin(x)-\left(-\cos(x)\cos(x)\right)}{[\cos(x)]^2}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{[\cos(x)]^2}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)}+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=1+\tan^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=1+\tan^2(x)$$

$$\Leftrightarrow dy=\left(1+\tan^2(x)\right).dx$$

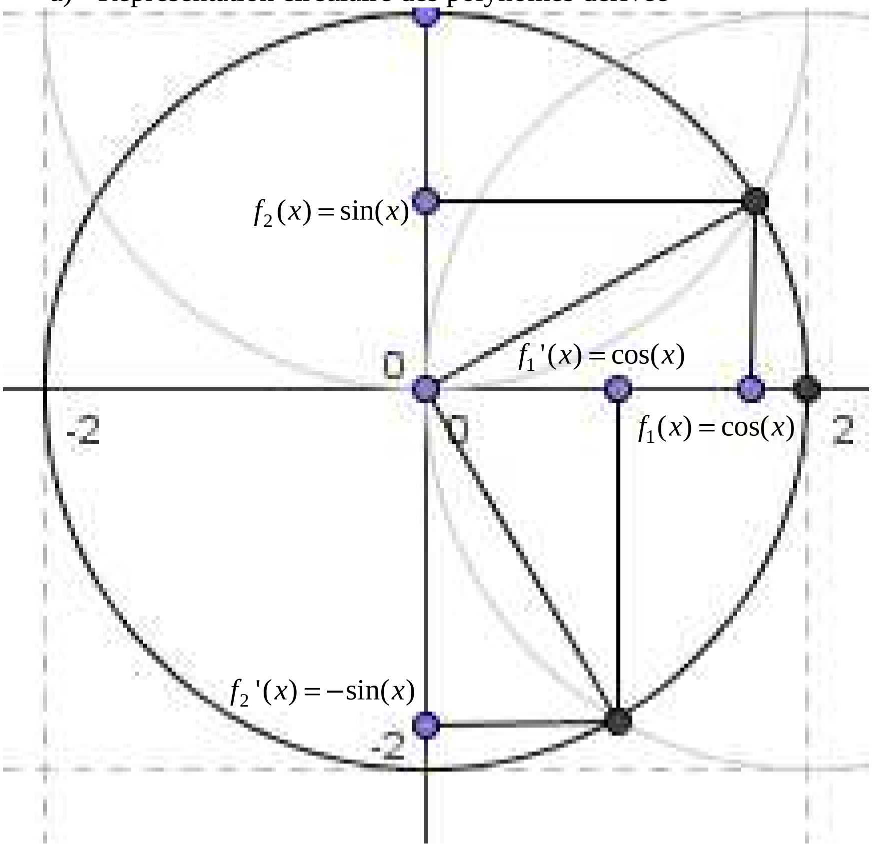
$$\Leftrightarrow dy=dx+\tan^2(x)dx$$

En résumé :

$$\begin{cases}f(x)=\cos(x)\Rightarrow f'(x)=-\sin(x)\\ f(x)=\sin(x)\Rightarrow f'(x)=\cos(x)\\ f(x)=\tan(x)\Rightarrow f'(x)=1+\tan^2(x)\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=\cos(x)\Rightarrow dy=-\sin(x)\,dx\\ y=\sin(x)\Rightarrow dy=\cos(x)\,dx\\ y=\tan(x)\Rightarrow dy=dx+\tan^2(x)\,dx\end{cases}$$

a) Représentation circulaire des polynômes dérivée



Donc les polynômes dérivée corresponde à la symétrie : ¨

$$f(x)=f_1(x)\Rightarrow f_1'(x)=f\left(-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)\Leftrightarrow f(x)=\sin(x)\Rightarrow f'(x)=\sin\left(-x+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos(x)$$

$$f(x)=f_2(x)\Rightarrow f_2'(x)=f\left(-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)\Leftrightarrow f(x)=\cos(x)\Rightarrow f'(x)=\cos\left(-x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin(x)$$

Plus succintement :

8) Différentielles des fonctions trigonométriques composées

8.1) Différentielles de f(x) = cos (ax + b) ; (1ère C)

Il vient que par définition des fonctions dérivées et différentielles que :

$$f(x)=\cos(x) \Rightarrow f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$Soit \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cos(ax+b)+\Delta x)-\cos(ax+b)}{\Delta x}$$

$$\begin{cases}\cos(a+b)=\sin(a).\cos(b)-\sin(a).\sin(b)\\ \cos(a-b)=\cos(a).\cos(b)+\sin(a).\sin(b)\end{cases} avec \begin{cases}(a+b)=ax+a\Delta x+b\\ (a-b)=ax+b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a=2ax+a\Delta x\\ 2b=a\Delta x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=ax+b+\dfrac{a\Delta x}{2}\\ b=\dfrac{a\Delta x}{2}\end{cases}$$

$$\cos(p)-\cos(q)=\cos(a+b)-\cos(a-b) = -2\sin(a).\sin(b) =-2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}a.\cos(a(x+\Delta x)+b)-\cos(ax+b)}{\frac{1}{2}a\Delta x}=\frac{-\frac{1}{2}a2\sin(ax+\frac{a\Delta x}{2}+b).\sin(a.\frac{\Delta x}{2})}{\frac{1}{2}a\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}a.\cos(a(x+\Delta x)+b)-\cos(ax+b)}{\frac{1}{2}a\Delta x}=\frac{-\frac{1}{2}a2\sin(ax+\frac{a\Delta x}{2}+b).\left(\sin(a.\frac{\Delta x}{2})\right)}{\frac{1}{2}a\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}a.\cos(a(x+\Delta x)+b)-\cos(ax+b)}{\frac{1}{2}a\Delta x}=\frac{-\frac{1}{2}a2\sin(ax+\frac{a\Delta x}{2}+b).\left(\sin(a.\frac{\Delta x}{2})\right)}{\frac{1}{2}a\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos(ax\Delta x+b+\Delta x)-\cos(ax+b)}{\Delta x}=-a\sin(ax+\frac{a\Delta x}{2}+b)\frac{\sin(a.\frac{\Delta x}{2})}{\frac{1}{2}a\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cos(ax\Delta x+b+a\Delta x)-\cos(ax+b)}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0} a.\sin(ax+a\frac{\Delta x}{2}+b).\frac{\sin(X)}{X}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cos(a(x+\Delta x)+b)-\cos(ax+b)}{\Delta x}=-a.\sin(ax+b)$$

Donc :

$$f(x)=\cos(ax+b) \Leftrightarrow f'(x)=a.\sin(ax+b)$$
$$f(x)=a\sin(ax+b) \Rightarrow f'(x)=-a\cos(ax+b)$$

8.2) Différentielles de f(x) = sin (ax + b) ; (1ère C)

a) démonstration 1 :

Il vient que par définition des fonctions dérivées et différentielles que :

$$f(x)=\sin(ax+b)\Rightarrow f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(a(x+\Delta x)+b)-\sin(ax+b)}{\Delta x}$$

Ors cette fonction est inexploitable sous cette forme, mais des formules trigonométriques, posons :

$$\begin{cases}Sin(a+b)=\sin(a).\cos(b)+\cos(a).\sin(b)\\ Sin(a-b)=\sin(a).\cos(b)-\cos(a).\sin(b)\end{cases} avec \begin{cases}(a+b)=ax+b+a\Delta x\\ (a-b)=ax+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a=2(ax+b)+a\Delta x\\ 2b=a\Delta x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin(a+b)-\sin(a-b)=2\cos(a).\sin(b)\\ a=(ax+b)+\dfrac{\Delta x}{2}\\ b=\dfrac{a\Delta x}{2}\end{cases}$$

Il vient que :

$$\frac{\sin(ax+a\Delta x+b)-\sin(ax+b)}{\Delta x}=\frac{2\cos(ax+\frac{a\Delta x}{2}+b).\sin(a\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{2}a\sin(x+\Delta x)-\sin(x)}{\frac{1}{2}a\Delta x}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)(a)\left(2\cos(ax+\frac{a\Delta x}{2}+b).\sin(a\frac{\Delta x}{2})\right)}{a\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin(x)}{\Delta x}=\frac{a\cos(ax+\frac{a\Delta x}{2}+b).\sin(a\frac{\Delta x}{2})}{a\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a\cos(ax+\frac{a\Delta x}{2}+b).\sin(a\frac{\Delta x}{2})}{a\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}a\left(\cos(ax+\frac{a\Delta x}{2}+b)\times\frac{\sin(a\frac{\Delta x}{2})}{a\frac{\Delta x}{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x}=a\left(\lim_{\Delta x\to 0}\cos(ax+\frac{a\Delta x}{2}+b)\right)\times\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(X)}{X}\right);où\ X=\frac{\Delta x}{2}$$

$$\Leftrightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x}=\left(a\cos(ax+b)\right)\times(1)$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=-a\cos(ax+b)\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=a\cos(ax+b)\Leftrightarrow dy=\cos(ax+b)\,adx=\cos(U)\,dU$$

Donc

$$f(x)=a\sin(ax+b)\Rightarrow f'(x)=a\cos(ax+b)$$

8.3) Différentielles de f(x) = tan (ax + b) ; (1ère C)

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\tan((a(x+h)+b)-\tan(ax+b)}{h}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\tan((ax+b+ah)-\tan(ax+b)}{h}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{\sin((ax+b)+ah)}{\cos((ax+b)+ah)}-\tan(ax+b)}{h}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{h}\left(\frac{\frac{\sin(ax+b)\cos(ah)+\cos(ax+b)\sin(ah)}{\cos(ax+b)\cos(ah)}}{\frac{\cos(ax+b)\cos(ah)-\sin(ax+b)\sin(ah)}{\cos(ax+b)\cos(ah)}}-\tan(ax+b)\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{h}\left(\frac{\tan(ax+b)+\tan(ah)}{1-\tan(ax+b)\tan(ah)}-\tan(ax+b)\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{h}\left(\frac{\tan(ax+b)+\tan(ah)}{1-\tan(ax+b)\tan(ah)}-\frac{[\tan(ax+b)(1-\tan(ax+b)\tan(ah))}{1-\tan(ax+b)\tan(ah)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{h}\left(\frac{\tan(ax+b)+\tan(ah)-\tan(ax+b)+\tan^2(ax+b)\tan(ah)]}{1-\tan(ax+b)\tan(ah)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{h}\left(\frac{[\tan(ah)[1+\tan^2(ax+b)]}{1-\tan(ax+b)\tan(ah)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{a}{ah}\tan(ah)\left(\frac{1+\tan^2(ax+b)}{1-\tan(ax+b)\tan(ah)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\left(a\frac{1}{ah}\frac{\sin(ah)}{\cos(ah)}\right)\left(\frac{1+\tan^2(ax+b)}{1-\tan(ax+b)\tan(ah)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\left(\frac{a}{\cos(ah)}\frac{\sin(ah)}{ah}\right)\left(\frac{1+\tan^2(ax+b)}{1-\tan(ax+b)\tan(ah)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{a}{\cos(a.\Delta x)}\frac{\sin(a\Delta x)}{a.\Delta x}\right)\left(\frac{1+\tan^2(ax+b)}{1-\tan(ax+b)\frac{\sin(a.\Delta x)}{\cos(a.\Delta x)}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\left(\frac{a}{1}\times 1\right)\left(\frac{1+\tan^2(ax+b)}{1-\tan(ax+b)\frac{0}{1}}\right)$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=a(1+\tan^2(ax+b))\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=a+a\tan^2(ax+b)\Leftrightarrow dy=[a+a\tan^2(ax+b)]dx$$

$$\Leftrightarrow dy=adx(1+\tan^2(ax+b))\Leftrightarrow dy=dU[1+\tan^2(U)]$$

Exemple numérique :

$$\begin{cases} f(x)=\cos(x) \Leftrightarrow f\,'(x)=-\sin(x) \\ f(x)=\sin(x) \Leftrightarrow f\,'(x)=\cos(x) \\ f(x)=\tan(x) \Leftrightarrow f\,'(x)=1+\tan^2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \left(f(x) \;\; ; \;\; f\,'(x)\right)=\left(\cos(x) \;\; ; \;\; -\sin(x)\right) \\ \left(f(x) \;\; ; \;\; f\,'(x)\right)=\left(\sin(x) \;\; ; \;\; \cos(x)\right) \\ \left(f(x) \;\; ; \;\; f\,'(x)\right)=\left(\tan(x) \;\; ; \;\; 1+\tan^2(x)\right) \end{matrix}$$

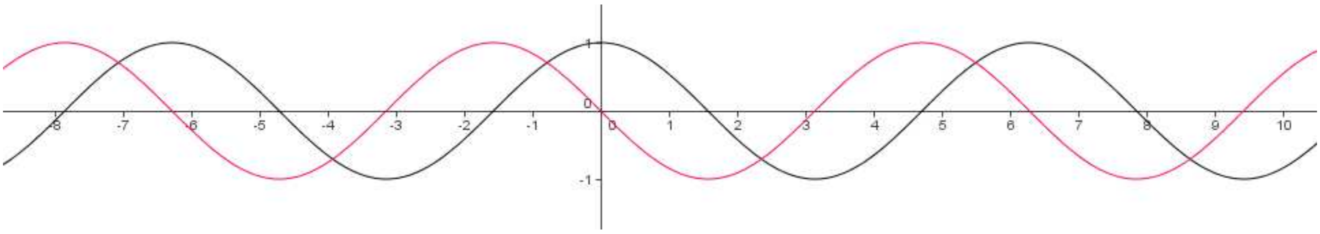
$$\Leftrightarrow \bigcup_{i=1}^{i=3} f_i(x)=\left(\cos;\sin;\tan\right)^{\circ}(x) \Leftrightarrow \bigcup_{i=1}^{i=3} f_i\,'(x)=\left(-\sin;\cos;1+\tan\right)^{\circ}(x)$$

$$y=\cos(x) \Rightarrow f\,'(x)=-\sin(x)$$
$$y=\sin(x) \Rightarrow f\,'(x)=\cos(x)\,dx$$
$$y=\tan(x) \Rightarrow f\,'(x)dx+\tan^2(x)\,dx$$

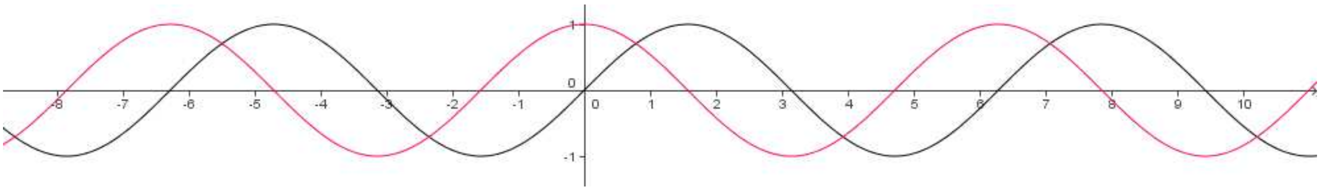
$$f(x)=\cos(2x) \Rightarrow (U;U\,')=(2x;2) \Rightarrow f\,'(x)=2\sin(2x)$$
$$f(x)=\cos(2x) \Rightarrow (U;U\,')=(2x;2) \Rightarrow f\,'(x)=2\sin(2x)$$
$$f(x)=\tan(x) \Rightarrow f\,'(x)=1+\tan^2(x)$$

8.4) Graphe des fonction trigonométrique et des fonctions différentielles

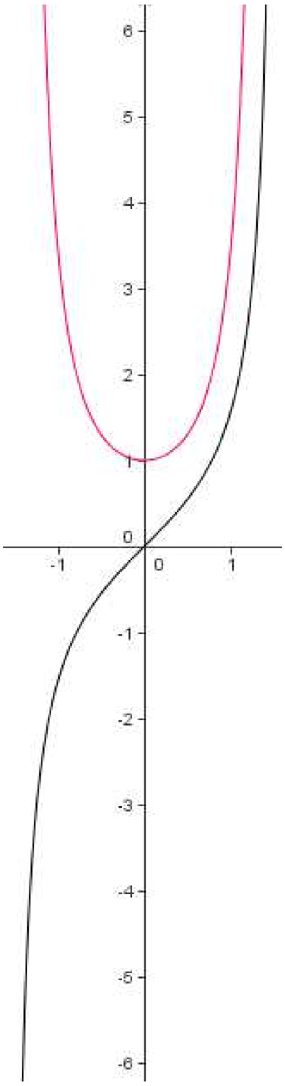
$$f(x)=\cos(x) \Leftrightarrow f'(x)=-\sin(x)$$



$$f(x)=\sin(x) \Leftrightarrow f'(x)=\cos(x)$$



$$f(x)=\tan(x) \Leftrightarrow f'(x)=1+\tan^2(x)$$



9) Différentielle de fonctions réciproques :

9.1) Fonction dérivée, différentielle de arc sin (x)

Par suite il vient que :

$$\begin{cases} \sin[arc\sin(x)] = x \text{ où } x \in [-1;1] \\ arc\sin(\sin y)] = y \text{ où } y \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Par définition des fonctions différentielles trigonométriques :

$$f(x) = \sin(x) \Leftrightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} = -\cos(x)$$

De $\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d[\sin(x)]}{dx} = \cos(x)$

$$\Leftrightarrow dy = \cos(x)dx$$

Et de :

$$\left(y = arc\sin(x) \Leftrightarrow x = \sin y\right)$$

Soit en posant par simplicité d'écriture: $x = Y$ et $y = X$, Il vient que :

$$x = \sin y$$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{\sin(y+\Delta y) - \sin(y)}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

Par suite :

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\sin(y+\Delta y) - \sin(y)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\frac{\sin(y+\Delta y) - \sin(y)}{\Delta x}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\Delta x} \times \Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\sin(y+\Delta y) - \sin(y)}{\Delta x}}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\sin(y+\Delta y) - \sin(y)}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(y+\Delta y) - \sin(y)}{\Delta x}} = \frac{1}{\cos(y)}$$

Ors du théorème de Pythagore dans le cercle trigonométrique, il vient que :

$$\cos^2(y) + \sin^2(y) = R \Leftrightarrow \cos^2(y) + \sin^2(y) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(y) = 1 - \sin^2(y) \Leftrightarrow \cos(y) = \sqrt{1 - \sin^2(y)}$$

Soit :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - [\sin(y)]^2}}$$

Puisque :

$$x = \sin y$$

Il vient que :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{1 - [\sin(y)]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Soit en posant un système, il vient par définition des fonctions dérivées trigonométriques :

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{arc\sin(x+\Delta x)-arc\sin(x)}{\Delta x}\\ \begin{cases}\sin[arc\sin(x)]=x \text{ où } x\in[-1;1]\\ arc\sin(\sin y)]=y \text{ où } y\in[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}]\end{cases}\\ y=arc\sin(x)\Leftrightarrow x=\sin y\Rightarrow\begin{cases}\Delta Y=f(x+\Delta x)-f(x)=x+\Delta x-x=\Delta x\\ \Delta X=\Delta y=(\sin y+\Delta y)-\sin(y)\end{cases}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\Delta Y}{\Delta X}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\Leftrightarrow\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=\dfrac{\sin(y+\Delta y)-\sin(y)}{\Delta x}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{\dfrac{\sin(y+\Delta y)-\sin(y)}{\Delta x}}\\ f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sin(y+\Delta y)-\sin(y)}{\Delta x}}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{\cos(y)}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} f'(x)\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2(y)}}\\ \begin{cases}Pythagore:\cos^2(y)+\sin^2(y)=R^2\\ Rayon:\ R=1\end{cases}\Leftrightarrow\sin^2(y)=1-\cos^2(y)\Leftrightarrow\sin(x)=\sqrt{1-\cos^2(y)}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\sin(y)\\ f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Leftrightarrow dy=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$Donc:\ f(x)=arc\sin(x)\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

9.2) Fonction dérivée, différentielle de arc cos (x)

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{arc\cos(x+\Delta x)-arc\cos(x)}{\Delta x} \\ y=arc\cos(x)\Leftrightarrow x=\cos y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \dfrac{\Delta x}{\Delta y}=\dfrac{\cos(y+\Delta y)-\cos(y)}{\Delta x}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{\frac{\cos(y+\Delta y)-\cos(y)}{\Delta x}} \\ f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\frac{\cos(y+\Delta y)-\cos(y)}{\Delta x}}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{-\sin(x)}=-\frac{1}{\sin(x)}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \begin{cases} Pythagore:\cos^2(x)+\sin^2(x)=R^2 \\ Rayon:\ R=1\end{cases}\Leftrightarrow\sin^2(x)=1-\cos^2(x)\Leftrightarrow\sin(x)=\sqrt{1-\cos^2(x)} \\ f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2(y)}}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x=\cos(y)\Leftrightarrow[\cos(y)]^2=x^2\Leftrightarrow\cos^2(y)=x^2 \\ f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Leftrightarrow dy=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$Donc:\ f(x)=arc\cos(x)\Leftrightarrow f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

9.3) Fonction dérivée, différentielle de arc tan (x)

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{arc\tan(x+\Delta x)-arc\tan(x)}{\Delta x} \\ y=arc\tan(x)\Leftrightarrow x=\tan y\Rightarrow\begin{cases}\Delta Y=f(x+\Delta x)-f(x)=x+\Delta x-x=\Delta x\\ \Delta X=\Delta y\end{cases}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\Delta Y}{\Delta X}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\Leftrightarrow\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=\dfrac{\tan(y+\Delta y)-\tan(y)}{\Delta x}\Leftrightarrow\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{\dfrac{\tan(y+\Delta y)-\tan(y)}{\Delta x}}\\ f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\tan(y+\Delta y)-\tan(y)}{\Delta x}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\tan(y+\Delta y)-\tan(y)}{\Delta x}}=\dfrac{1}{f'(y)}=\dfrac{1}{f^{-1}{}'(y)}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{1+\tan(x)}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\tan(y)\\ f'(x)=\dfrac{1}{1+x}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x}$$

$$\Leftrightarrow dy=\frac{dx}{1+x}$$

$$Donc:\ f(x)=arc\sin(x)\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x}$$

Résumé des fonctions différentielles réciproques

$$\boxed{\begin{array}{l}Soit\ \ y=f(x)\Leftrightarrow x=f(y)=f^{-1}(x)=g(x)\\ il\,vient\,que\\ g'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f^{-1}(x+\Delta x)-f^{-1}(x)}{\Delta x}\\ g'(x)=\dfrac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}\\ soit\ g(x)=f^{-1}(x)\Rightarrow g'(x)=\dfrac{1}{\left[f^{-1}(x)\right]'}\\ ou\ \ g(x)=f(y)\Rightarrow g'(x)=\dfrac{1}{f'(y)}\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}f(x)=arc\sin(x)\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\ f(x)=arc\cos(x)\Leftrightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\ f(x)=arc\tan(x)\Leftrightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{1+x}\end{array}}$$

10) Intégrale indéfinie

10.1) Intégrale indéfinie

Les intégrales indéfinies sont les intégrales non bornées, représentant la fonction à l'infinie :

$$\int f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^-}^{\mathbb{R}^+} f(x)dx = F(x)+C = F(x)+C$$

Où F(x) est appelée primitive, C est une constante arbitraire, puisque les primitives sont l'opération réciproque des fonctions dérivées tel que si c_1, c_2, existent, alors dans leurs dérivations, ces constantes sont nulle (égale à 0), en effet :

$$\begin{cases} f_1(x)=\sum_{k=n}^{k=1} a_k x^k + c_1 \Rightarrow f_1'(x)=\sum_{k=n}^{k=1} a_k x^k \\ f_2(x)=\sum_{k=n}^{k=1} a_k x^k + c_2 \Rightarrow f_1'(x)=\sum_{k=n}^{k=1} a_k x^k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(x)-f_2(x)=c_1-c_2=C \\ f_1'(x)-f_1'(x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \int [f_1'(x)-f_1'(x)]dx=[f_1(x)-f_2(x)]+C$$

Les intégrales n'étant que les opérations réciproques des dérivations :

$$\text{Fonction initiales} \approx \text{Fonction Primitive} \underset{\textit{Intégration}}{\overset{\textit{dérivation}}{\rightleftarrows}} \text{fonction dérivée} \Leftrightarrow f(x)=F(x)+C \underset{\textit{Intégration}}{\overset{\textit{dérivation}}{\rightleftarrows}} f'(x)$$

Alors des formules de dérivations (Celles-ci sont à savoir par cœur)
(pr plus d'information cf : dérivations des fonctions ou étude de fonctions dans analyse):

$$f(x)=x \Leftrightarrow f'(x)=1 \Leftrightarrow dy=dx \Leftrightarrow I(x)=\int 1dx=\int dx = x+C$$

$$f(x)=e^x=\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{x^k}{k!}=1+\frac{1}{1}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3...+0$$

$$\Rightarrow f'(x)=\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{x^{k-1}}{k-1!}=0+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+...+\frac{1}{(k-1)!}x^{k-1}=e^x+0$$

$$\text{Principe succint}:\frac{1}{(\infty_2-1)!}x^{\infty_0-1};x^{\infty_1-1}\le\infty_2-1;$$

Ce qui reste à prouver en cherchant la le levée de l'indéterminée ∞/∞ par les limites, ou les dl, ou les suites et séries numériques.

$$\left[(\infty_2-1)!=1.2.3.4.5.....\times i\times...\times\infty_{2;n-1}\times\infty_2;n\right]\gg k.10^{\infty}\Leftrightarrow(\infty)\gg\infty_1-1$$

$$\Leftrightarrow f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x \Leftrightarrow dy=e^x dx \Leftrightarrow \int dy=\int e^x dx = e^x+c$$

$$f(x)=\ln(x) \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{x} \Leftrightarrow I(x)=\int\frac{1}{x}dx=\int\frac{dx}{x}=\ln(x)\quad Rq:\frac{1}{x}\in\mathbb{R}^*;\ln(x)>0;x=\ln(e^x)\ \ et\ e^x>0$$

$$f(x)=\ln(U)\Leftrightarrow f'(x)=\frac{U'}{U(x)}\Leftrightarrow I(x)=\int\frac{U'}{U(x)}dx=\int\frac{dU'}{U(x)}=\ln(U)$$

$$\begin{cases} f(x)=\cos(x)\Rightarrow f'(x)=\sin(x) \\ f(x)=\sin(x)\Rightarrow f'(x)=-\cos(x) \\ f(x)=\tan(x)\Rightarrow f'(x)=1+\tan^2(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=a\cos(ax+b)\Leftrightarrow\dfrac{dy}{dx}=a.\sin(ax+b)\Leftrightarrow dy=\sin(ax+b)\,adx=\sin(U)\,dU \\ y=a\sin(ax+b)\Leftrightarrow\dfrac{dy}{dx}=-a\cos(ax+b)\Leftrightarrow dy=-\cos(ax+b)\,adx=-\cos(U)\,dU \\ f'(x)=a(1+\tan^2(ax+b))\Leftrightarrow dy=adx(1+\tan^2(ax+b))\Leftrightarrow dy=dU[1+\tan^2(U)] \end{cases}$$

10.2) Intégrale définie

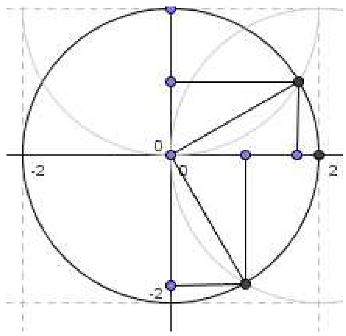
Une intégrale définie est une intégrale définie dans un intervalle tel que I = $[a;b]$, alors si les fonctions sont dérivables dans cet intervalles, il vient que son intégrale est :

$$\int f(x)\,dx = \int_a^b f(x)dx = [F(b)-F(a)] + C \ tel\, que\, b > a$$

Ainsi par exemple dans les cadres des fonctions trigonométriques dérivables dans l'intervalle $[-1;1]$ soit sont intégrables dans l'intervalle $[0;2\pi]$:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} f(x)dx = \left[F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] + C$$ en rappelant que :

Exemple numérique 1 : $\int_{\pi/3}^{\pi/6} \sin(x+\frac{\pi}{3})\,dx$



$$\int_{\pi/3}^{\pi/6} \sin(x+\frac{\pi}{3})\,dx = -\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \int_{\pi/3}^{\pi/6} \sin(x+\frac{\pi}{3})2dx = -\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \cos(\pi)\right]$$

$$\Leftrightarrow \int_{\pi/3}^{\pi/6} \sin(x+\frac{\pi}{3})2dx = -\left[\frac{1}{2}-1\right] = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Quelques propriétés intéressantes

La relation de chasles

$$\int_b^c f(x)dx + \int_a^b f(x)dx = [F(c)-F(b)] + [F(b)-F(a)] = [F(c)-F(a)]$$

Donc

$$\int_b^c f(x)dx + \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

La multiplication scalaire

$De : g(x) = af(x) \Rightarrow f'(x) = U'V - UV' \Leftrightarrow f'(x) = af'(x) + (a)'f(x) = af'(x) + 0 = af'(x)$

Il vient que :

$$\begin{cases} a\int f'(x)dx = a\,f(x) \\ \int a\,f'(x)dx = af(x) \end{cases} \Leftrightarrow a\int f'(x)dx = \int a\,f'(x)dx$$

Exemple

$$De\ f(x) = kx^{n+1} \Leftrightarrow f'(x) = k\,n\,x^{n-1} \Rightarrow f(x) = \left(\frac{kx^{n+1}}{n+1}\right) \Leftrightarrow f'(x) = kx^{n} \Leftrightarrow \int 5x^{n}dx = 5\int xdx = 5\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Par suite :

$$\begin{cases} g(ax+b) = f(ax+b) \Rightarrow g'(ax+b)dx = a\,f'(ax+b) \\ d'où \int f(ax+b)dx = \int \frac{1}{a}a.f(ax+b)dx = \left(\frac{1}{a}\right)\int af(ax+b)dx = \left(\frac{1}{a}\right)\int a.f'(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int g'(ax+b)\,dx \\ \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \left(\frac{1}{a}\right)\int g'(ax+b)dx = \frac{g(ax+b)}{a} \end{cases}$$

Exemple : soit $I(x) = \int \sin(2x+b)dx$

Il vient des fonctions dérivées :

$$\begin{cases} f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = \sin(x) \Leftrightarrow y = \cos(x) \Rightarrow dy = -\sin(x)\,dx \\ f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = -\cos(x) \Leftrightarrow y = \sin(x) \Rightarrow dy = \cos(x)\,dx \\ f(x) = \tan(x) \Rightarrow f'(x) = 1+\tan^2(x) \Leftrightarrow y = \tan(x) \Rightarrow dy = dx + \tan^2(x)\,dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\cos(x) \Rightarrow dy = -\sin(x)\,dx \\ y = -\sin(x) \Rightarrow dy = \cos(x)\,dx \\ y = \tan(x) \Rightarrow dy = dx + \tan^2(x)\,dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \cos(ax+b) \Leftrightarrow f'(x) = a.\sin(ax+b) \\ f(x) = a\sin(ax+b) \Rightarrow f'(x) = -a\cos(ax+b)dy = adx \\ f(x) = (1+\tan^2(ax+b)) \Leftrightarrow dy = [1+\tan^2(ax+b)]adx = [1+\tan^2(U)]U'dx = [1+\tan^2(U)]dU \end{cases}$$

Il vient que :

$$I(x) = \int \frac{1}{2}2\sin(2x+b)dx = \int \frac{1}{2}\sin(2x+b)2dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int \sin(U)\,dU = -\frac{1}{2}\cos(U) = -\frac{1}{2}\cos(u)$$

$$Soit: I(x) = \int \frac{1}{2}\sin(2x+b)(2dx) \Leftrightarrow \int \frac{1}{2}\sin(U)(dU) \Leftrightarrow \int \sin(U)\frac{dU}{2} \Leftrightarrow \int dv\frac{dU}{U'} \Leftrightarrow \frac{V}{U'}$$

Soit autrement dit : $I(x) = \int \sin(2x+b)\,dx$ (voir Intégrale des sommes de fonctions dérivées)

$$\begin{cases} U = 2x+b \Rightarrow dU = U'dx = 2dx \Rightarrow dv.dU \\ \Leftrightarrow dv.dU = dv\frac{1}{2}2xdx = dv\frac{du}{2} = dv\frac{du}{u'} \Rightarrow \int dv\frac{du}{u'} = \frac{1}{u'}\int dv = \frac{1}{u'}v \Leftrightarrow u' = c^{te} = 1;2;15... \\ v = \cos(U) \Leftrightarrow f'(v)dx = dv = -Sin(U).U'dx = -Sin(U)dU \Leftrightarrow -\cos(U) = -Sin(U)dU \\ dvdU = [Sin(U)]dU \Rightarrow w = \int dvdU = \int Sin(U)dU = \int Sin(U)\frac{du}{u'} = \frac{1}{u'}\int Sin(U)du = \frac{\cos(U)}{u'} = -\frac{1}{2}\cos(u) + c \end{cases}$$

:

Au final, par soucis de clarté, on écrit simplement :

$$I_1(x)=\int \sin(2x+b)\,dx\ ;$$
$$Posons:\begin{cases}U=2x+b,\ U'=2\Rightarrow dU=u'dx=2dx\\ v=\int \sin(U)du=\dfrac{-\cos(U)}{U'}\end{cases}$$
$$\Rightarrow I=\int \sin(2x+b)\,dx=\frac{\cos(2x+b)}{2}$$

$$I_2(x)=\int \cos(5x+4)\,dx\ ;$$
$$Posons:\begin{cases}U=5x+4,\ U'=5\Rightarrow dU=u'dx=5dx\\ v=\int \cos(U)du=\dfrac{\sin(U)}{U'}\end{cases}$$
$$\Rightarrow I=\int \sin(2x+b)\,dx=\frac{\sin(5x+4)}{5}$$

Par suite son intégrale $I(x)=\int \sin(3x+\frac{\pi}{4})\,dx$ définie et dérivable et sur $I=\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{6}\right]$ est donc intégrable sur cet intervalle I :

$$I(x)=\int_{\pi/6}^{\pi/4}\sin(3x+\frac{\pi}{4})\,dx=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{-\left[\cos\left(3\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(3\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)\right]}{3}\ de:\begin{cases}\int Sin(u)du=-\cos(u)\\ U=3x+\frac{\pi}{4}\Rightarrow U'=3\end{cases}$$

$$\begin{cases}I(x)=\dfrac{-\left[\cos(\pi)-\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]}{3}=\dfrac{\left[\left(-\frac{1}{3}\right)(-1)\left(\frac{1}{2}\right)\right]}{3}=-\dfrac{\left(\frac{1}{6}\right)}{\frac{3}{1}}=\dfrac{1}{6}.\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{12}\\ ou\\ I(x)=-\dfrac{1}{3}\left[\cos(\pi)-\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]=-\dfrac{1}{3}\left[\left(-\frac{1}{3}\right)(-1)\left(\frac{1}{2}\right)\right]=-\dfrac{1}{12}\end{cases}$$

Remarque : $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{d}{c}=\dfrac{ad}{bc}\Rightarrow\dfrac{\frac{a}{b}}{c}=\dfrac{a}{bc}$

10.3) Calcul d'aire par les intégrales (Explication succinte)

Une aire par définition est défini par une longueur et une largeur :

$A=L\times l$

Soit encore sur un repère orthonormé ou la longueur sur l'axe des abscisses est Δx et la largeur sur l'axe des ordonnées est Δy

Soit $A=\Delta y\times\Delta x$

Il vient par définition des fonctions différentielle que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = dx \quad \lim_{\Delta y \to 0} \Delta y = dy$$

D'où dans l'infiniment petit : $A = dy \times dx$

Ors : $\dfrac{dy}{dx} = f\,'(x) \Leftrightarrow \dfrac{dydx}{dx} = f\,'(x)dx \Leftrightarrow dy = f\,'(x)dx$

Donc l'intégrale d'un repère orthonormé est aussi une aire d'une figure géométrique

11) Calcul d'aire : Aire du cercle trigonométrique (démonstration de :   )

Méthode 1 :

Périmètre du cercle :

De : $\begin{cases} \dfrac{Périmètre}{Diamètre} = \pi \\ Diamètre = 2 * rayon \;\; r \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{P}{2r} = \pi \Leftrightarrow P = 2\pi r$

D'où, on peut encore écrire que le cercle a un périmètre de :

$$P = \sum_{0}^{T}(kr) = \sum_{k=0}^{k=2\pi}(k_i r) = (2\pi - 0)r = 2\pi r$$

Aire du cercle : Aire du trait : $l * L = lr = kr$

Comme le trait va suivre le cercle, il va effectuer le périmètre du cercle tel que $k = 2\pi r$, d'où :

Aire du cercle : $\sum_{k=0}^{k=2\pi r} kr = (2\pi r)r = 2\pi r^2$

Méthode 2 :

Méthode 3 : Calcul d'aire du cercle par le calcul intégrale (Démonstration originale)

De: $x^2+y^2+r \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1 \Leftrightarrow \quad \frac{y}{r}=\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}} \Leftrightarrow \quad y=r\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}$

Par symétrie, l'aire d'un cercle centré à l'origine est quatre fois l'aire d'un cercle entre $[0;0]$ et $[r;0]$ au dessus de l'axe x. Nous pouvons intégrer pour trouver l'aire (A) :

$$A=4r\int_0^r\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}dx$$

Ors :

$$\begin{cases} \cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)=1 \Leftrightarrow 1-\sin^2(\alpha)=\cos^2(\alpha) \\ x=r\sin(\alpha) \Rightarrow x=f(\alpha) \Leftrightarrow dx=r\sin(\alpha)d\alpha \Leftrightarrow dx=r\cos(\alpha)d\alpha\,; \\ \alpha=\arcsin\left(\frac{x}{r}\right) \Leftrightarrow d\alpha=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ \Leftrightarrow \begin{cases} dx=\sqrt{1-x^2}\,d\alpha=\sqrt{1-r^2\sin(\alpha)^2}\,d\alpha=\sqrt{1-\sin(\alpha)^2}\,d\alpha=\sqrt{\cos^2(\alpha)}\,d\alpha=\cos(\alpha)d\alpha \\ r^2=1 \end{cases} \end{cases}$$

$$A=4r\int_0^r\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}\,dx=4r\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}\,\cos(\alpha)\,d\alpha$$

$$\Leftrightarrow A=4r\int_0^r\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}\,dx=4r\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}\,\cos(\alpha)\,d\alpha=4r^2\int_0^{\pi/2}\cos^2(\alpha)$$

$$de\quad Cos(2a)=\left(\cos^2(a)\right)-(1-\cos^2(a)) \Leftrightarrow\ Cos(2a)=2\cos^2(x)-1 \Leftrightarrow \frac{\cos(2a)+1}{2} \Leftrightarrow \cos^2(x)=\frac{1+\cos(2a)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(\alpha)=\frac{1}{2}(1+\cos 2(\alpha))\,;$$

$$\begin{array}{rrcl} & 4r^2\int_0^{\pi/2}\cos^2(\alpha) & = & 4r^2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1+\cos(2(\alpha)))d\alpha \\ \Leftrightarrow & 4r^2\int_0^{\pi/2}\cos^2(\alpha) & = & 4r^2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1+\cos(2(\alpha)))d\alpha \\ \Leftrightarrow & 4r^2\int_0^{\pi/2}\cos^2(\alpha) & = & 4r^2\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos(2(\alpha)))d\alpha \\ \Leftrightarrow & 4r^2\int_0^{\pi/2}\cos^2(\alpha) & = & 2r^2\left(\int_0^{\pi/2}d\alpha+\int_0^{\pi/2}\cos(2(\alpha))\,d\alpha\right) \\ \Leftrightarrow & 4r^2\int_0^{\pi/2}\cos^2(\alpha) & = & 2r^2\left([d\alpha]_0^{\pi/2}+[\sin(2(\alpha))]_0^{\pi/2}\right) \\ \Leftrightarrow & 4r^2\int_0^{\pi/2}\cos^2(\alpha) & = & 2r^2\left(\frac{\pi}{2}-0+\sin(2(\pi/2-0))\right) \\ \Leftrightarrow & 4r^2\int_0^{\pi/2}\cos^2(\alpha) & = & 2\frac{\pi}{2}r^2\sin(\pi) \\ \Leftrightarrow & 4r^2\int_0^{\pi/2}\cos^2(\alpha) & = & \pi r^2(1) \\ \Leftrightarrow & 4r^2\int_0^{\pi/2}\cos^2(\alpha) & = & \pi r^2 \end{array}$$

Bon, c'est la démonstration scolaire, malheureusement, elle contient un défaut de fabrications, habilement masqué :

12) Introduction au développement de fonctions trigonométriques et fonctions réciproques

12.1) Dérivation successives :

a) dérivation successives des fonctions trigonométrique

De :

$$\begin{cases} f(x)=\cos(x) \Rightarrow f'(x)=\sin(x) \\ f(x)=\sin(x) \Rightarrow f'(x)=-\cos(x) \end{cases}$$

Il vient que :

$$f(x)=\cos(x) \Rightarrow f'(x)=\sin(x)=f_1(x)$$

$$\Rightarrow f''(x)=f^2(x)=[f_1(x)]'=[\sin(x)]'=-\cos(x)=f_2(x)\ ;\ f^2(x)\, est\, lu\ f\ \text{seconde ou} f^{\ deuxième}$$

$$\Rightarrow f'''(x)=f^3(x)=[f_2(x)]'=[-\cos(x)]=-\sin(x)\ ;\ f^3(x)\, est\, lu\ f\ tierce\, ou\ f^{\ troisième}$$

$$\Rightarrow f^4(x)=[f_3(x)]'=[-\sin(x)]=\cos(x)\ ;\ f^4(x)\ est\, lu\ f^{\ quatrième}$$

En fait les dérivations successives de monômes de degré différents représente la fonction dérivée k de la fonction dérivée k-1

Par suite il vient que :

$$\begin{cases} f(x)=\cos(x) \\ f'(x)=-\sin(x) \\ f^2(x)=-[\sin(x)]'=-\cos(x) \\ f^3(x)=[-\cos(x)]'=-(-\sin(x))=\sin(x) \\ f^4(x)=[f_3(x)]'=[\sin(x)]=-\cos(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x)=\sin(x) \\ f'(x)=\cos(x) \\ f^2(x)=[\cos(x)]'=-\sin(x) \\ f^3(x)=-[\sin(x)]'=-\cos(x) \\ f^4(x)=\left[f^3(x)\right]'=-[\cos(x)]'=-(-\sin(x))=\sin(x) \end{cases}$$

Bon, la tangente, c'est tout simplement le rapport sin(x)/cos(x) y compris avec les dérivées successives

b) Dérivations successives des fonctions rationnelles

$$f(x)=arc\sin(x) \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=-\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}};\ f(x)=arc\cos(x) \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=-\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f(x)=arc\tan(x) \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

Des dérivations de fonctions rationnelles $f(x)=U^n \Rightarrow f'(x)=nU^{n-1}.U'(x)dx=nU^{n-1}dU$, on a :

$$f_1(x)=\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f^2(x)=(-1)-\frac{1}{2}(2x)\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}-1}=(x)\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{x^2}{\left(1-x^2\right)^2}}=\frac{x^2}{\sqrt{\left(1-x^2\right)}}$$

$$f^2(x)=\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f^3(x)=-\frac{3}{2}(2x)\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}-1}=(1.3)(x)\left(1-x^2\right)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f^3(x)=\left(1-x^2\right)^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f^4(x)=\frac{1.3.5}{2}(2x)\left(1-x^2\right)^{-\frac{5}{2}-1}=\frac{1.3.5}{2}(2x)\left(1-x^2\right)^{-\frac{7}{2}}=1.3.5(x)\left(1-x^2\right)^{-\frac{7}{2}}$$

Ce qui implique que :

$$f^n(x)=\prod_{k=1}^{2n-1}(k)\left(1-x^2\right)^{-\frac{2n+1}{2}}=\frac{\prod_{k=1}^{2n-1}(k)}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^{2n+1}}} \Rightarrow f^{n+1}(x)=\frac{\prod_{k=1}^{2n+1}(k)}{2}(2x)\left(1-x^2\right)^{-\frac{2n+3}{2}}=\frac{\prod_{k=1}^{2n-3}(k)(x)}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^{2n+3}}}$$

b) Dérivation successive :

Dérivation successives de : $f(x)=(1+x)^n$

$$f(x)=(1+x)^n \Rightarrow f'(x)=n(1)(1+x)^{n-1}$$
$$f'(x)=\left(\prod_{k=n}^{k=n-1} k\right)(1+x)^{n-1} \Rightarrow f''(x)=(n)(n-1)(1)(1+x)^{n-1}$$
$$f^2(x)=\left(\prod_{k=n}^{k=n-2} k\right)(1+x)^{n-1} \Rightarrow f^4(x)=(n)(n-1)(n-2)(1)(1+x)^{(n-1)-1}=\left(\prod_{k=n}^{k=n-2} k\right)(1+x)^{n-2}$$
$$f^3(x)=\left(\prod_{k=n}^{k=n-3} k\right)(1+x)^{n-2} \Rightarrow f^4(x)=(n)(n-1)(n-2)(n-3)(1)(1+x)^{n-3}=\left(\prod_{k=n}^{k=n-2} k\right)(1+x)^{n-3}$$
:
$$f^{n-1}(x)=\left(\prod_{k=n}^{k=n-(n-1)} k\right)(1+x)^{n-(n-2)}=\left(\prod_{k=n}^{k=1} k\right)(1+x)^{n-1}$$
$$\Rightarrow f^n(x)=(n)(n-1)(n-2)(n-3)...(1)(1+x)^n=\left(\prod_{k=n}^{k=1} k\right)(1)(1+x)^n$$

Il vient qu'en posant k = 1 et de la formule du binôme de Newton $(a+b)^n=C_n^k(a)^{n-k}b^k$:

$$(1+x)^n \overset{0}{\sim} \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k(-1)^k(1)^k\frac{(x)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k(-1)^k(x_0)^k\frac{(x)^k}{k!}\ si\,et\,seulement\,si\,(x_0)^k=1$$

12.2) Développement limité : Formule de Taylor Mac Laurin

$$f(x)\overset{0}{\sim} f(x_0+h) \Leftrightarrow f(x)\overset{0}{\sim}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k(x_0)^{n-k}\frac{h^k}{k!}\quad avec\quad h=x-x_0$$
$$\Rightarrow f(x)\overset{0}{\sim} f(x_0+h) \Leftrightarrow f(x)\overset{0}{\sim}\lim_{x\to 0} f(x_0+(x-x_0))$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x_0+(x-x_0))=\lim_{x\to 0}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k\left[g(x_0)\right]^{n-k}\frac{(x-x_0)^k}{k!}\quad si\,et\,seulement\,si\,\left[g(x_0)\right]^{n-k}\to 1$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x_0+(x-x_0))=\lim_{\begin{cases}x_0\to 0\\ x_1\to 1\end{cases}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k(x_1)^{n-k}\frac{(x-x_0)^k}{k!}\Leftrightarrow f(x)\overset{0}{\sim} f(x_0+h)$$
$$f(x)\overset{0}{\sim}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k x_1{}^{n-k}\frac{x^k}{k!}\quad où\ \overset{0}{\sim},\,signifiant\,que\,la\ fonction\,est\,équivalente\,au\,voisinage\,de\,zéro$$

Bon, j'ai failli encore à nouveau relier, les deux écriture, mais il y aurait un trifouillage de trop, alors qu'en 1999, j'ai relier dans ce style là de manière beaucoup plus simple. Donc pour l'instant je préfère en rester là, pour ne pas alourdir ce chapitre déjà, très conséquent, cela est déjà hors sujet en bac.

D'autre part il reste encore à étudier : $C_{1/2}^k$

Enfin, dernièrement, moi quand j'en serais là, sinon pour l'instant Science Ch qui les explique bien et peut être très bien, voir le chapitre suites et séries numériques

12.3) Développement limité des fonctions trigonométrique et réciproque

On rappelle que pour les mathématiciens :

$$(2n+1)!=\prod_{k=1}^{k=n}(2k+1)=(1).(3).(5).(7).....(2i+1)....(2i-1)(2i+1)\ et\ (2n+1)!=1.2.3.4\times...\times 2i-1\times...\times 2n+1$$

$$(2n)!=\prod_{k=1}^{k=n}(2k)=(2).(4).(6).(8).....(2i+1)....(2k-2)(2k)\quad et\ (2n)!=1.2.3.4.5\times...\times 2i\times...\times 2n$$

a) Développement limités des fonctions trigonométriques (sommes des dérivées successives)

$$\sin(x)=\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k(Sin)^k(0)\frac{(x)^k}{k!}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x)=(-1)^1\frac{(x)^1}{1!}+(-1)^2\frac{(x)^3}{3!}+...+(-1)^{i+1}\frac{(x)^{2i+1}}{(2i+1)!}+...+(-1)^{n-1}\frac{(x)^{2n-3}}{(2n-3)!}+(-1)^n\frac{(x)^{2n-1}}{(2n-1)!}+(-1)^{n+1}\frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x)=\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k(\cos)^k(0)\frac{(x)^k}{k!}$$

$$\cos(x)=1+(-1)^1\frac{(x)^2}{2!}+(-1)^2\frac{(x)^4}{4!}+...+(-1)^i\frac{(x)^{2i}}{(2i)!}+...+(-1)^{n-2}\frac{(x)^{2n-4}}{(2n-4)!}+(-1)^{n-1}\frac{(x)^{2n-2}}{(2n-2)!}+(-1)^n\frac{(x)^{2n}}{(2n)!}$$

b) Développement limité de l'exponentielle (sommes des dérivations successives)

$$\begin{cases}(1+x)^{\alpha}=e^x\\ e^x=\frac{(x)^1}{1!}+\frac{(x)^2}{2!}+...+\frac{(x)^{2i+1}}{(2i+1)!}+...+\frac{(x)^{2n-3}}{(2n-3)!}+(-1)^n\frac{(x)^{2n-1}}{(2n-1)!}+(-1)^{n+1}\frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k(e^0)\frac{(x)^k}{k!}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (1+x)^n=\frac{(x)^1}{1!}+\frac{(x)^2}{2!}+...+\frac{(x)^{2i+1}}{(2i+1)!}+...+\frac{(x)^{2n-3}}{(2n-3)!}+(-1)^n\frac{(x)^{2n-1}}{(2n-1)!}+(-1)^{n+1}\frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k(e^0)\frac{(x)^k}{k!}$$

$$f(x)\overset{0}{\sim}\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k f^k(0)\frac{(x)^k}{k!}\Leftrightarrow f(x)\overset{0}{\sim}\sum_{k=0}^{k=n}\frac{x^k}{k!}$$

g) Développement limité de arc sin (x)

Il vient que le développement limité de arc sin (x) est : $Arc\ \sin(x)\overset{0}{\sim}\sum_{j=0}^{j=n}\frac{\prod_{k=0}^{k=j}2i-1}{\prod_{k=0}^{k=j}2i}\frac{x^k}{k!}$, Soit

$$Arc\ \sin(x)\overset{0}{\sim}(x)+\frac{1}{2}\frac{(x)^3}{3!}+...+\frac{1.3}{2.4}\frac{(x)^5}{(5)!}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{(x)^7}{(7)}+...+\frac{\prod_{k=0}^{k=i}2i-1}{\prod_{k=0}^{k=i}2i}\frac{(x)^{2k+1}}{k!}+....+\frac{1.3.5...(2n-1)}{2n}\frac{(x)^{2n+1}}{(2n)!}$$

11.4) Introduction des nombres de développement ou série limité : Le nombre π :

Des développements limités trigonométriques réciproques avec $\forall x \in \left[\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow f(x) \in [1;-1]$

Résultat informatique :

$$Arc\ \sin(x)=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{\prod_{k=0}^{j=n}2j-1}{\prod_{j=0}^{j=n}2j}\frac{(x)^{2k+1}}{2k+1}$$

$$\Leftrightarrow Arc\ \sin(x)=(x)+\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{3}}{3}+\ldots+\frac{1.3}{2.4}\frac{(x)^{5}}{(5)}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{7}}{(7)}+\ldots+\frac{\prod_{k=0}^{k=i}2i-1}{\prod_{k=0}^{k=i}2i}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{i}}{i}+\ldots.+\frac{1.3.5...(2n-1)}{2n}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{2(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{j=1}^{j=9}\left(\frac{\prod_{k=0}^{k=j}2i-1}{\prod_{k=0}^{k=j}2i}\frac{x^{2j+1}}{2j+1}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\frac{1}{2^{1}(3)}\\ \frac{1.3}{(2.4)}\frac{1}{2^{5}(5)}\\ \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{2^{7}(7)}\\ \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{1}{2^{9}(9)}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10.}\frac{1}{2^{11}(11)}\\ \frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12}\frac{1}{2^{13}(13)}\\ \frac{1.3.5.7.9.11.13}{2.4.6.8.10.12.14}\frac{1}{2^{15}(15)}\\ \frac{1.3.5.7.9.11.13.15}{2.4.6.8.10.12.14.16}\frac{1}{2^{17}(17)}\\ \frac{1.3.5.7.9.11.13.15.17}{2.4.6.8.10.12.14.16.18}\frac{1}{2^{19}(19)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5\\ 0{,}020833333\\ 0{,}00234375\\ 0{,}000348772\\ 5{,}93397E-05\\ 1{,}09239E-05\\ 2{,}11826E-06\\ 4{,}26173E-07\\ 8{,}81332E-08\\ 1{,}86188E-08\end{pmatrix}=0{,}523598776$$

Puisque $arc\sin\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow 6\ \ arc\sin\left(\frac{1}{2}\right)=\pi$, il vient que

$$\pi=(6)\left[\sum_{j=1}^{j=9}\left(\frac{\prod_{k=0}^{k=j}2i-1}{\prod_{k=0}^{k=j}2i}\frac{x^{2j+1}}{2j+1}\right)\right]=(6)(0{,}523\,598\,776)=3{,}141\,592\,656$$

Résultat informatique :

k1	k2	(2k-1)!	(2k) !	
1	1	1	1	1
1	2	1	2	0,5
3	4	3	8	0,375
5	6	15	48	0,3125
7	8	105	384	0,2734375
9	10	945	3840	0,24609375
11	12	10395	46080	0,225585938
13	14	135135	645120	0,209472656

n1	d1	P1=n1/d1	k3	2^k3	P2=P1^k3	P2/K3		1
1	2	0,5	1	2	0,5	0,5	0,5	0,5
1	2	0,5	3	8	0,125	0,041666667	0,020833333	0,52083333
1	2	0,5	5	32	0,03125	0,00625	0,00234375	0,52317708
1	2	0,5	7	128	0,0078125	0,001116071	0,000348772	0,52352586
1	2	0,5	9	512	0,001953125	0,000217014	5,93397E-05	0,5235852
1	2	0,5	11	2048	0,000488281	4,43892E-05	1,09239E-05	0,52359612
1	2	0,5	13	8192	0,00012207	9,39002E-06	2,11826E-06	0,52359824

Les sites ou blog les plus importants ou/et sérieux traitant des Polynômes ou fonctions trigonométriques sont :

Science CH	http://www.sciences.ch/htmlfr/geometrie/geometrietrigonometrie01.php
Wikiwersité	http://fr.wikiversity.org/wiki/Trigonom%C3%A9trie
Math World	http://mathworld.wolfram.com/topics/Trigonometry.html
Andrée levesque	http://www.vif.com/users/aleves/doc/trigo.pdf
Didier Muller	http://www.apprendre-en-ligne.net/MADIMU2/FONCT/FONCT6.PDF
Mathris	http://static.blog4ever.com/2009/04/310546/artfichier_310546_259180_201107183326563.pdf Cette fois, ça en vaut le coup d'œil cette fois
	Formulaire
Wikipédia	
Essentiel Mathématique	http://www.ccm.polymtl.ca/ateliers/atelier4_trigonometrie.PDF
	http://gilles.costantini.pagesperso-orange.fr/Lycee_fichiers/CoursT_fichiers/formtrig.pdf
Annexe : Article connexe	
Acos(x)+bsin (x)	http://www.mathcentre.ac.uk/resources/workbooks/mathcentre/web-rcostheta-alphaetc.pdf
Géométrie euclidienne	http://passerelle.u-bourgogne.fr/publications/webeuclide/

Jeudi 17 Novembre 2011

Alors à la lettre écrite à la DST en 1989, suite à des événements politico-journalistique-cinématographique. Ce qui revient sur le tapis dans certains journaux aujourd'hui :

Suis je un génie ou suis je un débile ?

Euuuh, les david, on s'en fout complètement vers 30-40 ans. Les gens écrasent et nous mettent dans une très grande solitude, ou PD, ou Pédophile, surtout la droite, soit le 0 vie. Je me suis retranché sur moi-même depuis mes 32 ans. Maintenant ma réponse télévisuelle, à l'image de mon premier QI informatique, j'ai entre 110 et 120, et franchement cette position me convient parfaitement. D'autre part, pour être un génie à notre époque sur 4*1 000 pages, c'est bien là où j'ai changé, c'est totalement impossible. J'ai aimé aussi une autre réflexion, celle d'un botaniste, ou de certains sportifs. Euuuh, la société que ce soit en théorie ou en pratique, construit des modèles que nous améliorons tous le temps. Euuuh, les david, vous faites partie de cette catégorie, et franchement dans notre société actuelle, c'est l'essentiel. D'autre part au billard, on peut me considérer comme un génie, alors qu'en langues étrangères, je suis relativement faible. Euuh, en math, une fois les 4 domaines terminés, tout le s'apercevra que je fais partie du top then national sur une 100 aine de site free et payant. Pour l'instant à notre actif, ce qui fait partie réellement du top then mondial, hors de l'enceinte scientifique sans documents moderne, ce sont les Systèmes d'Equations, la trigonométrie, les nombres complexes, Les Dérivations. Ce qui ne plait ni à moi ni aux autres, c'est d'avoir développé comme un véritable 90-100 à cause de maintes et maintes maladresses de la part des professionnels de haut niveau. Sachant pertinemment que l'erreur est humaine en plus des documents truqués par les satellites. Y compris en chiffre qu'il faut souvent vérifier en informatique. Tout ce que je peux vous dire les "davids". C'est qu'à notre époque à l'inverse du XVIIIème siècle, c'est qu'il existe plusieurs types d'intelligences (émotionnelle, littéraire, scientifique, technique), et qu'aujourd'hui, il est quasiment impossible sauf en revenant au code source ou être dans les sport ou en chanson, d'être tous cela à la fois; cela demande beaucoup trop de temps et d'effort.

Les mathématiques, c'est 5 000 années d'existence. Et franchement tout inventé serait non seulement surhumain et en plus extrêmement insolent au niveau satellitaire. Quand à la théorie des ensembles, là où mon bas blesse, tant qu'il parleront à l'inverse du dictionnaire français, c'est non, pour moi. Sinon, elle serait sincèrement intéressante à étudier. Mais : pas d'exemple, trop généraliste, malgré les exception et spécificité. Donc : ?

Euuuh, dernière chose David, ce que l'on ne dis jamais ni à la Télé, ni dans les revue, excepté deux trois sites. Et avant de te le dire, soit dans mon ordre historique. Franchement depuis 2000, date où j'ai fini mes dérivations et relier les dérivation première, nième, développement limité, série limité trigonométriques. Euuuh, à l'intérieur de moi, j'ai ressenti dans mon ventre un extrême soulagement, tu sais comme quand tu expires profondément. En 2004-2005, j'étais relativement content de moi, puisque sans le savoir, en regardant leur biographie, Newton, Rieman, Taylor, Viète, Gauss, Einstein, sont tous passer par là, et c'est à partir de là qu'on les a considérer comme Génie ou génial, et dénoncer comme génie, après de grand travaux professionnel. Et tous, à leurs époques différentes ont harmonisé leurs écritures. Tous.

Tiens, à ce propos la fixette depuis 2006 sur le classement, reste en fier, mais franchement, on s'en tape, alors garde la tête froide, et fais ta vie. De toutes façon au pire de ta forme tu restes situé à la 400 ième place national sur environ 10 000 personnes. Soit, tu fais partie des 5 % de la population.